RECHERCHES

SUR PLUSIEURS OUVRAGES

DE LÉONARD DE PISE

DÉCOUVERTS ET PUBLIÉS

Par M. le Prince BALTHASAR BONCOMPAGNI

ET SUR LES RAPPORTS QUI EXISTENT ENTRE CES OUVRAGES
ET LES TRAVAUX MATHÉMATIQUES DES ARABES

PAR M. F. WOEPCKE

Membre correspondant de l'Académie de'Nuovi Lincei

PREMIÈRE PARTIE
Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits.

III.

Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn.

Extrait des *Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei*
Sessione 2ª del 13 Gennajo 1861 Vol. 14°



ROME
IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
1861

III.

Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn.

A.

TRADUCTION D'UN FRAGMENT ANONYME SUR LA FORMATION DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES ENTIERS.

1.

. . . . . l'angle (droit de ce triangle est compris entre les côtés) six et huit, et sous-tendu par dix. Ce (triangle) est donc de l'espèce du premier triangle. Il en est de même de celui dont l'angle est compris entre un et demi, et deux, et sous-tendu par deux et demi. Ce (triangle) est encore de la même espèce. La même chose a lieu pour les autres triangles souches qui se comportent de cette manière. fol. 81 *recto.*

OBSERVATIONS.

Le fragment dont on lit ici la traduction, est contenu dans le manuscrit 952 bis du Supplément arabe de la Bibliothèque Impériale de Paris (numéro du Catalogue rédigé par M. Reinaud). J'ai inséré une description détaillée de ce manuscrit dans un mémoire intitulé: Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles (publié dans le Tome XIV des Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France), pages 6 à 14 du tirage à part. Le présent fragment est mentionné sous le N.° 19 de l'énumération des traités ou fragments de traités contenus dans ce ms., qui est donnée à l'endroit cité.

J'y ai dit aussi que la table qui se trouve à la fin du ms., et qui a été rédigée bien longtemps après l'époque où a été faite la plus grande partie des copies que renferme le ms., est signée du 11 moharram 657 de l'hégire (8 janvier 1259 de notre ère). Or, je crois qu'au temps de cette date le commencement du traité que je traduis ici, manquait déjà dans ce ms.; et voici les raisons qui me déterminent à pencher pour cette opinion. Dans la table dont je viens de parler, chaque titre est précédé d'un numéro d'ordre exprimé par les lettres de l'alphabet numéral. Les mêmes lettres se trouvent dans le corps du ms. écrites à l'encre rouge près des titres des traités correspondants. Or, le présent fragment finit au bas du recto d'un feuillet (fol. 86 r.°), et le traité suivant, qui commence en haut du verso du même feuillet, porte le numéro d'ordre 22; de cette disposition il résulte que, quand même le volume aurait été défait après la rédaction de la table, et que ses parties auraient été rassemblées par la suite dans un autre ordre (comme cela paraît avoir été le cas), toujours notre fragment serait le traité correspondant au numéro 21 de la table. Or, tandis que le titre du traité qui commence au fol. 86 v.° du ms., et le titre qu'on trouve sous le numéro 22 de la table, se correspondent parfaitement, le titre que l'on trouve sous le numéro 21 de la table, ne correspond que vaguement au contenu du fragment. Ce titre est: « Du carré et de la racine » (*fî 'l-mâl wa 'l-djidzr*). Je conclus de là que le rédacteur de la table n'avait plus sous les yeux le commencement et le véritable titre du traité, et qu'il a fait lui-même le titre que je viens de dire, d'après un examen plus ou moins superficiel du contenu des pages qui restaient de ce morceau. Je fais observer toutefois, que ce titre « Du carré et de la racine » n'est pas aussi étranger à la matière traitée dans le fragment, qu'on pourrait le croire en voyant qu'il y est question principalement de triangles rectangles formés en nombres entiers. Car on verra plus loin que toute cette théorie a pour but la solution du problème de trouver « des carrés qui, augmentés ou diminués d'un même nombre, produisent deux nombres dont on puisse extraire la racine », ou, comme nous dirions, deux nombres carrés. Les termes de cet énoncé du

problème des nombres congruents se rapprochent suffisamment du titre 21 de la table, pour nous convaincre que ce titre se rapporte effectivement au fragment.

La partie qui a précédé le commencement actuel du fragment, et qui manque dans le ms., paraît n'avoir été que d'une étendue peu considérable, ou n'avoir contenu que des préliminaires. Du moins l'absence de cette partie ne nuit en aucune façon ni à la clarté ni à l'intérêt de ce qui nous reste du traité. (Comparer aussi ci-après les observations 15.)

Les lignes ci-dessus paraissent terminer un paragraphe dans lequel l'auteur a expliqué la distinction qu'il faut faire entre les triangles rectangles primitifs, qu'il appelle triangles souches, et les triangles rectangles dérivés, qu'on obtient en multipliant les trois côtés d'un triangle rectangle primitif par un même nombre. Il donne comme exemples des triangles dérivés, les triangles 6, 8, 10 et $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, que l'on obtient en multipliant respectivement par 2 et par $\frac{1}{2}$ les côtés du triangle primitif 3, 4, 5.

2.

Nous avons trouvé que ces triangles ne sont jamais que des moitiés de carrés oblongs, et qu'il est impossible qu'ils soient des moitiés de carrés équilatéraux. Car, si les deux côtés qui comprennent l'angle droit, sont égaux et rationnels, il est impossible qu'ils soient sous-tendus par un nombre rationnel, et s'ils sont sous-tendus par un (nombre) rationnel, il est impossible qu'ils soient rationnels et égaux. En effet, il ne saurait exister de nombre ayant une racine rationnelle, et dont le double ait également une racine rationnelle.

OBSERVATION.

Le fait énoncé par l'auteur est une conséquence du théorème démontré déjà par Euclide dans la 117e proposition du Xe livre des Éléments (page 325 de l'Édition d'Oxford), ou de la vérité que $\sqrt{2}$ est une quantité irrationnelle.

3.

Nous avons trouvé que l'hypoténuse de chacun de ces triangles qui sont les souches des espèces, c'est à dire le côté qui sous-tend l'angle droit, est toujours impair, et que ce nombre impair est constamment divisible en deux nombres dont on peut extraire la racine, et dont l'un est impair et l'autre pair.

Nous avons trouvé aussi que ces nombres impairs se suivent dans un ordre déterminé par une propriété unique, et qu'ils n'en sortent jamais. C'est que le premier des nombres qui peuvent être des hypoténuses, est le nombre cinq. Or, si l'on ordonne les nombres impairs qui suivent le cinq, d'après leur ordre naturel, à savoir : sept, neuf, onze, treize, quinze, dix-sept, dix-neuf, vingt un, vingt trois, vingt cinq, vingt sept, vingt neuf, trente un, et ainsi de suite jusqu'au nombre que vous voudrez; vous trouverez qu'entre le second des nombres qui peuvent être des hypoténuses de triangles souches de leurs espèces, et entre le cinq qui en est le premier, sont compris trois nombres impairs, et que le (nombre dont il s'agit,) est le quatrième, à savoir treize. (Vous trouverez) ensuite qu'entre ce second nombre et le troisième est compris un seul nombre impair, et (le nombre cherché) est le second (à partir du précédent) à savoir dix-sept. Entre ce troisième et le quatrième sont compris trois nombres (de la suite que nous venons de dire); ensuite entre le quatrième et le cinquième un nombre, entre le cinquième et le sixième trois nombres, et entre le sixième et le septième un nombre; et ainsi de suite, en montant de cette manière jusqu'au

nombre que vous voudrez, si ce n'est que cette suite comprend aussi (quelquefois) un nombre impair qui n'est pas décomposable en deux nombres dont on puisse extraire la racine, comme par exemple quarante neuf, soixante dix-sept et cent vingt un. Lorsqu'on arrive à un nombre semblable, il est impossible que ce (nombre) soit hypoténuse d'un triangle, mais il en occupe seulement le rang; les nombres qui le suivent, restent rangés suivant l'ordre que nous avons expliqué, et qu'ils ne cessent pas de conserver.

OBSERVATIONS.

L'auteur énonce ici trois théorèmes : premièrement que l'hypoténnse d'un triangle primitif est toujours décomposable en deux carrés. Secondement qu'elle est toujours de la forme $12m + 1$ ou $12m+5$. Troisièmement quo tous les nombres de la forme $12m + 1$ ou $12m + 5$ ne sont pas réciproquement des hypoténuses de triangles primitifs.

Pour nous rendre compte de la justesse de ces théorèmes il ne sera pas inutile d'exposer en quelques mots les principes fondamentaux de la théorie dont l'auteur s'occupe; ces explications serviront en même temps de base à l'éclaircissement d'autres considérations que l'auteur développe dans la suite de son traité.

1. Soit
$$x^2 + y^2 = z^2$$
un triangle rectangle primitif. Comme x, y, z sont premiers entre enx, ni deux de ces nombres, ni tous les trois ne peuvent être pairs. Ils ne penvent pas non plus être tous les trois impairs, parce que la somme de deux nombres impairs est paire. Le seul cas possible est done que l'un des trois nombres soit pair, et que les deux antres soient impairs; et encore on voit que ce n'est pas x et y qui peuvent à la fois être impairs; car la somme de deux carrés impairs $(2\mu + 1)^2 + (2\nu + 1)^2$ est de la forme $4m + 2 = 2(2m + 1)$ ce qui ne peut pas être un carré. Il résulte de là que l'hypoténuse d'un triangle rectangle primitif est toujours impaire, tandis que l'une de ses deux cathètes est paire et l'autre impaire.

Soit y la cathète paire; il s'ensuit que $\frac{z + x}{2}$ et $\frac{z - x}{2}$ sont des nombres entiers; mais ce sont en même temps des nombres carrés. En effet, on a

$$\frac{z + x}{2} \cdot \frac{z - x}{2} = \frac{1}{4} y^2 .$$

Or, $\frac{z + x}{2}$ et $\frac{z - x}{2}$ sont premiers entre eux ; car, si $\frac{z + x}{2}$ et $\frac{z - x}{2}$ avaient un facteur commun δ, de sorte que $\frac{z + x}{2} = r\delta$ et $\frac{z - x}{2} = s\delta$, il s'ensnivrait que $z = (r+s)\delta$ et $x = (r-s)\delta$, et le triangle ne serait pas primitif. Le produit de deux nombres premiers entre enx $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ étant un carré, il faut donc que chacun de ces deux nombres soit un carré. Conséquemment z est la somme de deux carrés. On voit en même temps que x est la différence des deux mêmes carrés, tandis que y est deux fois le produit des racines des mêmes carrés.

2. Tont triangle rectangle primitif étant, comme on vient de le voir, de la forme

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 ,$$

on obtiendra tons les triangles primitifs en prenant ponr a et b toutes les valeurs qui rendent a^2+b^2 impair, d'où il suit que toujours l'nn des deux nombres a, b doit être pair et l'autre impair, donc $a + b$ de la forme $2n + 1$. On obtiendra par conséquent tous les triangles primitifs en prenant toutes les décompositions de tous les nombres impairs :

$$2n + 1 = (n + \alpha + 1) + (n - \alpha) \qquad \text{où} \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n - 1,$$

et en excluant parmi ces décompositions celles où $n + \alpha + 1$ et $n - \alpha$ anraient un facteur commun. On voit d'abord qu'aucune de ces décompositions ne peut être identique avec une décomposition précédente; et que les côtés de tous les triangles résultant de ces décompositions seront représentés par les expressions

1) $(n+\alpha+1)^2-(n-\alpha)^2=(2n+1)(2\alpha+1)$

2) $2(n+\alpha+1)(n-\alpha)$

3) $(n+\alpha+1)^2+(n-\alpha)^2=2n(n+1)+2\alpha(\alpha+1)+1$

De ces expressions il suit immédiatement que, pour que le triangle soit primitif, il faut et il suffit que $(n+\alpha+1)$ et $(n-\alpha)$ soient premiers entre eux. On reconnaît, en outre, qu'aucun triangle ne se présentera deux fois. Car si deux décompositions d'un même nombre impair $2n+1$ donnaient lieu à deux triangles égaux, les hypoténuses de ceux-ci seraient égales, donc $2n(n+1)+2\alpha(\alpha+1)+1=2n(n+1)+2\alpha'(\alpha'+1)+1$, ce qui est impossible tant que α' est différent de α, attendu qu'on ne peut pas prendre $\alpha'=-(\alpha+1)$. Si les deux décompositions appartenaient à deux nombres impairs différents $2n+1$ et $2n'+1$, on remarquerait que non seulement les deux hypoténuses doivent être égales, mais encore que le côté 1) de l'un des deux triangles doit être égal au côté 1) et non pas au côté 2) de l'autre, parce qu'un nombre impair ne peut pas être égal à un nombre pair. On aurait donc les deux équations simultanées

$$(n+\alpha+1)^2+(n-\alpha)^2=(n'+\alpha'+1)^2+(n'-\alpha')^2$$
$$(n+\alpha+1)^2-(n-\alpha)^2=(n'+\alpha'+1)-(n'-\alpha')^2$$

d'où l'on tirerait les suivantes

$$n+\alpha+1=n'+\alpha'+1$$
$$n-\alpha=n'-\alpha'$$

lesquelles donneraient enfin $n=n'$, $\alpha=\alpha'$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3. La seconde valeur du troisième côté

$$2n(n+1)+2\alpha(\alpha+1)+1$$

prouve que l'hypoténuse est toujours de la forme $4m+1$ et conséquemment que, par rapport au module 12, elle ne peut être que des formes $12m+1$, $12m+5$, $12m+9$. Mais il est aisé de voir que cette dernière forme doit être exclue, parce que l'hypoténuse d'un triangle rectangle primitif ne peut pas être divisible par 3.

En effet, tout carré ne pouvant être que de la forme $3m$ ou $3m+1$, la somme des deux carrés $(n+\alpha+1)^2+(n-\alpha)^2$ ne pourra être divisible par 3 que lorsque chacun des deux carrés séparément est divisible par 3, et, par conséquent, lorsque $n+\alpha+1$ et $n-\alpha$ sont chacun divisible par 3. Mais, dans ce cas, les deux cathètes seraient également divisibles par 3, donc le triangle rectangle ne serait pas primitif.

Il suit de là que *l'hypoténuse d'un triangle rectangle primitif est toujours de la forme* $12m+1$ *ou de la forme* $12m+5$. *)

4. La réciproque n'a pas lieu. Tout nombre des formes $12m+1$ ou $12m+5$ n'est pas nécessairement décomposable en deux carrés. Car, soient p, q, r, s .... des nombres premiers, inégaux, plus grands que 3 et de la forme $4m+3$, et soient t, u, v, w .... des nombres premiers et inégaux de la forme $4m+1$; le nombre

$$p^{\alpha}.q^{\beta}.r^{\gamma}.s^{\delta}\ldots\ldots t^{\lambda}.u^{\mu}.v^{\nu}.w^{\rho}\ldots\ldots$$

---

*) De ce qui précède découle immédiatement la démonstration d'un théorème que M. Poinsot a énoncé dans la séance du 7 mai 1849 de l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes Rendus*, I.er *semestre* 1849, pag. 582), à savoir que le produit des trois côtés du triangle est toujours divisible par le produit 3. 4. 5, mais que l'hypoténuse n'est jamais divisible par 3 ou 4.

1. L'hypoténuse z étant de la forme $12m+1$ ou $12m+5$, ne peut être divisible ni par 3, ni par 4.

2. La cathète $y=2(n+\alpha+1)(n-\alpha)$ est toujours divisible par 4. Car, si n et α sont à la fois pairs ou impairs, $n-\alpha$ est pair; et si l'un des deux nombres n, α est pair et l'autre impair, $n+\alpha+1$ est pair.

3. L'un des trois côtés x, y, z est nécessairement divisible par 5. En effet, chacun des deux carrés $(n+\alpha+1)^2$ et $(n-\alpha)^2$ ne peut être que de l'une des trois formes $25m$, $5m+1$, $5m+4$. Si l'un des deux carrés est de la forme $5m+1$ et l'autre de la forme $5m+4$, z est divisible par 5. Si l'un est de la forme $25m$ et l'autre de la forme $5m+1$ ou $5m+4$, y est divisible par 5. S'ils sont tous les deux de la forme $5m+1$ ou $5m+4$, $x=(n+\alpha+1)^2-(n-\alpha)^2$ est divisible par 5.

4. L'un des deux côtés x, y est nécessairement divisible par 3. Car chacun des deux carrés $(n+\alpha+1)^2$ et $(n-\alpha)^2$ ne peut être que de l'une des deux formes $9m$ ou $3m+1$. Si l'un est de la forme $9m$ et l'autre de la forme $3m+1$, y est divisible par 3; et si tous les deux sont de la forme $3m+1$, x est divisible par 3.

(où la somme $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$ des exposants des facteurs de la forme $4m+3$ doit être paire et >0, tandis que ces exposants mêmes ne doivent pas tous être pairs) sera toujours de la forme $12m + 1$ ou $12m + 5$, et cependant ne pourra pas être décomposé en deux carrés. Pareillement le nombre

$$(p^{\alpha} . q^{\beta} . r^{\gamma} . s^{\delta} \ldots)^2$$

sera toujours de la forme $12m + 1$, et ne sera cependant pas décomposable en deux carrés. Enfin les nombres de la forme $12m + 1$ ou $12m + 5$ qui sont décomposables en deux carrés, ne donnent pas toujours lieu à des triangles rectangles primitifs. (Voir ci-après les observations pag. 44 et suiv.)

4.

Une des choses merveilleuses qu'on trouve en examinant les nombres, c'est que si la suite (que nous avons décrite) conduit à un de ces nombres impairs qui ne peut pas | être hypoténuse d'un triangle, et qu'on la prolonge à partir de là d'un nombre ou de quelques nombres, il viendra un nombre qui est hypoténuse de deux triangles différents dont chacun est souche de son espèce. C'est ainsi que la suite conduit à quarante neuf qui ne peut pas être hypoténuse, parce qu'il n'est pas divisible en deux parties dont on puisse extraire la racine; ensuite si nous allons jusqu'au nombre soixante cinq, nous trouvons qu'il sous-tend deux triangles dont l'un a pour un de ses deux (autres) côtés soixante trois et pour l'autre seize, tandis que l'autre triangle a pour un de ses deux (autres) côtés trente trois et pour l' autre cinquante six. Pareillement la suite conduit à soixante dix-sept, qui est un des (nombres) qui ne peuvent pas être hypoténuses; puis, lorsque nous sommes arrivés au nombre quatre-vingt cinq, nous trouvons qu'il sous-tend deux triangles dont l'un a pour un de ses deux (autres) côtés soixante dix-sept et pour l'autre côté trente six, tandis que l'autre triangle a pour un de ses deux (autres) côtés treize et pour l'autre côté quatre-vingt quatre. Cela avec d' autres choses encore fait partie de ce qui sera certainement expliqué dans la table ordonnée suivant ces nombres que nous proposerons bientôt, si telle est la volonté de Dieu.

fol. 81 *verso.*

Ceci sont les principes fondamentaux de la connaissance des hypoténuses des triangles qui sont les souches des espèces. Je n'ai pas trouvé que cela fût mentionné dans aucun des ouvrages anciens; ni aucun des modernes qui ont composé des traités sur le calcul, ne l'a mentionné non plus; et je ne sache pas que cela ait été révélé à quelqu'un avant moi. La gloire appartient à Dieu seul.

OBSERVATIONS.

Après avoir énoncé que la suite des nombres des formes $12m + 1$ et $12m + 5$ renferme des nombres qui ne sont pas décomposables en deux carrés, l'auteur fait observer maintenant, qu'elle en renferme qui le sont de plus d'une manière. En effet, en désignant par $t, u, v, w, \ldots$[1]. des nombres premiers et inégaux de la forme $4m + 1$ et par F^2 un facteur quadratique dont les facteurs premiers sont de la forme $4m + 3$ et plus grands que 3, le nombre

$$F^2 . t^{\lambda} . u^{\mu} . v^{\nu} . w^{\rho} \ldots$$

sera de la forme $12m+1$ ou $12m+5$, et décomposable en deux carrés de $\frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)(\rho+1)\ldots$, ou de $\frac{1}{2}(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)(\rho + 1) \ldots - \frac{1}{2}$ manières, selon que parmi les nombres $\lambda, \mu, \nu, \rho, \ldots$ il s'en trouve un au moins qui soit impair, ou qu'ils sont tous pairs. (Comp. *Gauss, Disquisitiones arithmeticae.* Lipsiae 1801. Pagg. 218, 219).

Remarquons qu'il faudra exclure quelquefois certaines de ces décompositions parce qu'elles ne don-

nent pas lieu à des triangles primitifs. Ainsi, le nombre $(4n^2+1)^2$ est de la forme $12m+1$ ou $12m+5$ (suivant que n^2 est de la forme $3m$ ou $3m+1$), et donne lieu aux décompositions

1) $(4n^2+1)^2=(4n^2+1)^2+(8n^2+2n)^2$
2) $(4n^2+1)^2=(12n^2-1)^2+(8n^2-6n)^2$.

La première de ces décompositions doit être exclue, parce que les deux carrés qu'elle donne, ont le facteur commun $(4n^2+1)^2$. La seconde au contraire donnera toujours lieu à un triangle primitif, parce que $12n^2-1$ et $8n^2-6n=(4n^2-3)2n$ sont premiers entre eux. En effet, $12n^2-1$ ne peut d'abord être divisible ni par 2, ni par n, ni par un diviseur de n. Ensuite, si $12n^2-1$ et $4n^2-3$ avaient un facteur commun δ, de sorte que $12n^2-1=p.\delta$ et $4n^2-3=q.\delta$, il s'ensuivrait $8=(p-3q)\delta$, et δ devrait être un des nombres 8, 4, 2. Mais $12n^2-1$ et $4n^2-3$ sont impairs. Donc $12n^2-1$ et $8n^2-6n$ premiers entre eux.

L'auteur ne mentionne que des décompositions en deux carrés de *deux* manières différentes ; probablement parce qu'il n'a sous les yeux qu'un commencement peu étendu de la suite des nombres de la forme $12m+1$ et $12m+5$.

Il s'exprime aussi presque comme s'il avait pensé que les nombres de cette suite qui ne sont pas décomposables en deux carrés, et ceux qui le sont de plusieurs manières, se présentent à tour de rôle. Ce serait une erreur. En effet, les deux nombres 469 et 473 qui ne sont pas décomposables en deux carrés, sont deux termes contigus de la suite, il en est de même des deux nombres 209 et 217 ; les deux nombres 329 et 341 ne sont pas décomposables en deux carrés, et ne comprennent cependant entre eux que le nombre 337 qui n'est décomposable que d'une seule manière; de même les nombres 385 et 413, qui ne sont pas décomposables en deux carrés, ne comprennent entre eux que les nombres 389, 397, 401, 409, tous décomposables d'une manière seulement en deux carrés.

Les dernières lignes de l'auteur sont d'une certaine importance historique. Les formules telles que « si telle est la volonté de Dieu, » et l'opposition établie entre les « ouvrages anciens », c'est à dire les ouvrages grecs, et les traités de calcul des « modernes, » prouvent que l'auteur est mahométan, et que ce qu'il y a dans le présent traité d'original sur la théorie des triangles rectangles en nombres entiers, appartient à l'école arabe. D'un autre côté des dates de copie qu'on trouve à la fin d'une assez grande partie des morceaux contenus dans le ms. qui renferme ce fragment, constatent que ces morceaux ont été copiés pendant les années 969 à 972 de notre ère; il y a donc toute probabilité que l'auteur du fragment écrivit ce traité avant 972. A cette époque le développement des sciences chez les Arabes durait environ depuis deux siècles; et je pense qu'il faut placer la composition du présent traité bien plutôt vers la fin que vers le commencement de cet espace de temps.

5.

Il existe différentes manières d'arriver à la connaissance des côtés qui comprennent l'angle droit de chacun de ces triangles. Une de ces manières consiste à diviser l'hypoténuse que vous voudrez, dans ses deux parties dont on peut extraire la racine, à prendre la racine de l'une de ces parties, et à la multiplier par deux fois la racine de l'autre. Le produit sera toujours un nombre pair; et ce résultat (de la multiplication) est l'un des deux côtés de ce triangle. Ensuite vous additionnez les deux racines, et vous multipliez la somme par la différence des deux (racines). Le résultat, qui est toujours un nombre impair, est l'autre côté.

Par ce procédé on obtient ces triangles suivant l'ordre, de manière que l'un se présente après l'autre; il n'en sera oublié aucun, et il ne pourra arriver ni qu'on en omette un pour en prendre un autre, ni que certains d'entre eux aient des diviseurs communs avec certains autres.

OBSERVATION.

Ayant précédemment trouvé la suite des hypoténuses, $h=a^2+b^2$, l'auteur aura maintenant la suite complète des triangles rectangles primitifs en nombres entiers en formant pour chaque h et pour chaque décomposition d'un h où a et b sont premiers entre eux, les expressions $2ab$ et $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Il fait observer avec raison que le premier de ces produits est toujours pair et le second impair. Comparer ci-dessus les observations 3.

6.

Voici une autre manière d'arriver à la même connaissance, et qui comprend à la fois les triangles souches et ceux qui en sont dérivés. C'est que si vous multipliez la somme de deux nombres différents quelconques, quels qu'ils soient, par leur différence, il en résulte nn côté d'un triangle rectangle; si vous multipliez l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois, il en résulte un autre côté du même triangle ; et si vous multipliez chacun des deux (nombres) par lui-même, et que vous additionnez les (deux résultats), il résulte l'hypoténuse qui sous-tend ces deux côtés. C'est pour cette raison que chacune des hypoténuses de ces triangles est divisible en deux nombres dont on peut extraire la racine.

Si ensuite vous voulez obtenir par cette opération les triangles souches à l'exclusion des triangles dérivés, sachez qu'elle ne donne pas ces triangles purement, de manière que les uns n'aient pas des diviseurs communs avec les autres, si la somme des deux nombres dont on multiplie l'un par l'autre (pris) deux fois, et dont on multiplie la somme par la différence, n'est pas un nombre impair. Donc si votre but est celui (de trouver les triangles souches), prenez les nombres impairs, dont le premier est trois, divisez chacun de ces nombres dans les parties entières dans lesquelles | il peut être décomposé, (ordonnez) ces parties deux fol. 82 *recto.* à deux, et opérez sur les deux parties, comme vous aviez opéré sur les deux nombres (quelconques) dont nous avons parlé (ci-dessns). Les triangles qui résultent se suivent l'un l'autre. Il faut cependant que vous ayez sous les yeux les hypoténuses rangées suivant l'ordre, afin que vous puissiez chercher les (triangles), que vous auriez peut-être omis, et afin que (ce contrôle) vous révèle les triangles dérivés (qui par hasard se seraient glissés parmi vos résultats et) que vous n'auriez pas reconnus comme tels. Vous les supprimeriez ensuite, afin que vous ne les fassiez pas passer pour des triangles souches. Si telle est la volonté de Dieu.

Par exemple, le trois se divise en un et deux. Si vous multipliez l'un par le deux (pris) deux fois, vous aurez quatre, ce qui est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du premier triangle. Si vous multipliez la somme de l'un et du deux par la différence de ces deux (nombres) qui est nn, il résulte trois, ce qui est le second côté. Et si vous mnltipliez chacun des deux (nombres) par lui-même, et que vous additionnez les produits, il résulte cinq, ce qui est l'hypoténuse.

Pareillement le cinq, qui suit le trois, se divise en trois et deux, et en un et quatre. Si vous opérez sur le trois et le deux comme nous l'avons décrit, vous aurez le second triangle, qui est cinq et douze sous-tendus par treize. Et si vous opérez d'une manière semblabe sur le quatre et l'un, vous aurez le troisième triangle, qui est quinze et huit sous-tendus par dix-sept.

De même le sept se divise en trois et quatre, en deux et cinq, et en un et six.

OBSERVATIONS.

Il est évident que, a et b étant deux nombres quelconques différents l'un de l'autre, on aura

$$[(a+b)(a-b)]^2 + [2ab]^2 = [a^2+b^2]^2.$$

Cette formule est aussi celle qu'on trouve constamment employée dans le VIe. livre de Diophante. Mais il faut remarquer que cette solution de l'équation $x^2+y^2=z^2$ n'est qu'un cas particulier de la solution générale donnée déjà par Euclide (*Éléments*, X, 29, lemme 1), savoir

$$\left(\frac{\mu\alpha^2-\mu\beta^2}{2}\right)^2 + \mu\alpha^2.\,\mu\beta^2 = \left(\frac{\mu\alpha^2+\mu\beta^2}{2}\right)^2,$$

où $\mu\alpha^2$ et $\mu\beta^2$ doivent être en même temps pairs ou impairs.

L'auteur fait observer ensuite que, pour que le triangle soit primitif, il faut qu'on ait $a+b=2n+1$; c'est ce qui a été déjà expliqué ci-dessus (observations 3). Il va compléter ci-après cette condition en ajoutant qu'il faut, en outre, que a et b soient premiers entre eux.

Prenant pour exemples les nombres impairs 3 et 5, il a

$2n+1=3,\quad a=2,\ b=1;\ 2ab=4,\quad (a+b)(a-b)=3,\quad a^2+b^2=5$

$2n+1=5\ \begin{cases} a=3,\ b=2;\ 2ab=12,\quad (a+b)(a-b)=5,\quad a^2+b^2=13 \\ a=4,\ b=1;\ 2ab=8,\quad (a+b)(a-b)=15,\quad a^2+b^2=17. \end{cases}$

7.

L'opération (ci-dessus mentionnée, appliquée) à chaque couple de ces parties, produit un de ces triangles suivant l'ordre. Cependant si vous continuez de cette manière, les triangles ne sont plus produits suivant l'ordre, mais confondus entre eux. C'est pourquoi j'ai dit qu'il faut que vous ayez sous les yeux les hypoténuses rangées suivant l'ordre, afin qu'il n'y ait pour vous rien de difficile dans cette recherche. Vous verrez cela clairement dans le tableau que je vous en proposerai, si telle est la volonté de Dieu.

Si vous trouvez qu'un des nombres impairs, lorsque vous en faites la décomposition, se divise en deux parties qui ont un diviseur commun, n'employez pas ces deux (parties), parce que le triangle qui en résulte, est de l'espèce d'un triangle précédent.

Ainsi parmi les décompositions du neuf se trouvent six et trois qui ont un diviseur commun. L'opération (ci-dessus décrite, appliquée) à ces deux (nombres), produit un triangle dont un des deux côtés (comprenant l'angle droit) est trente six, l'autre vingt sept, et l'hypoténuse quarante cinq. Ce (triangle) est de l'espèce du triangle trois et quatre dont l'hypoténuse est cinq.

Pareillement parmi les décompositions du quinze se trouvent : six et neuf, cinq et dix, trois et douze. Chacun de ces couples a un diviseur commun, et ne donne lieu qu'au multiple d'un triangle précédent.

De même parmi les décompositions du vingt et un se trouvent: neuf et douze, sept et quatorze, six et quinze, trois et dix-huit. Tous ces (couples), se comportent comme on vient de le dire. Entendez cela, si Dieu le permet.

OBSERVATIONS.

L'auteur veut dire, dans le premier alinéa, que si l'on décompose les nombres impairs suivant l'ordre dans deux parties a, b, et si on forme au moyen de chaque couple a, b un triangle rectangle, les hy-

poténuses $(a^2 + b^2)$ de ces triangles ne se suivent plus, à partir d'un certain point, d'après l'ordre de leur grandeur. Le premier cas de ce genre se présente pour le nombre 9 qui donne lieu, par la décomposition $8 + 1$ à l'hypoténuse 65, tandis que le nombre 11, par la décomposition $6 + 5$, donne lieu à l'hypoténuse 61.

En général, étant proposés deux nombres impairs $i = a + b$ et $i' = a' + b'$, où $i < i'$, on aura cependant $a^2 + b^2 > a'^2 + b'^2$, si

$$(a - b)^2 - (a' - b')^2 > (a' + b')^2 - (a + b)^2.$$

Prenant pour $a - b$ et $a' - b'$ les limites extrêmes en posant

$$a = 2n, \quad b = 1, \qquad a' = n' + 1, \quad b' = n',$$

on voit que cette inégalité pourra avoir lieu dès que $2n^2 > n'(n' + 1)$ pendant que $n < n'$, par conséquent dès que $2(n' - 1)^2 > n'(n' + 1)$, d'où $n' \geq 5$. L'inégalité dont il s'agit peut donc avoir lieu dès que $n' = 5$, $n = 4$, on à partir des nombres impairs $i = 9$, $i' = 11$.

Le tableau auquel l'auteur fait allusion est celui qu'on trouvera ci-dessous au N°. 19.

Ensuite l'auteur complète la condition qui doit être remplie pour que a et b produisent un triangle rectangle primitif, en énonçant comme nécessaire que a et b soient premiers entre eux. (Comparer observations 6.) Les valeurs $a + b = 3, 5, 7$ considérées précédemment, n'avaient pas donné lieu à cette remarque. En effet, si a et b ont un commun diviseur δ, de sorte que $a = p\delta$, $b = q\delta$, on a

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= (p^2 - q^2)\delta^2 \\ 2ab &= 2pq\delta^2 \\ a^2 + b^2 &= (p^2 + q^2)\delta^2 ; \end{aligned}$$

le triangle produit sera donc semblable au triangle produit précédemment au moyen des nombres p et q qui forment une décomposition d'un nombre impair plus petit que $p\delta + q\delta$; car si $(p + q)\delta$ est impair, $p + q$ l'est également.

8.

Il existe différentes manières de produire ces triangles, dont une consiste en ce que (si vous prenez) deux nombres quelconques se suivant | d'après l'ordre fol. 82 *verso.*
naturel, la somme des deux (nombres) est un côté du triangle, et le produit de l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois est le second côté du même triangle.

OBSERVATIONS.

Prenant deux nombres consécutifs m et $m + 1$ on a

$$[m + (m + 1)]^2 + [2m(m + 1)]^2 = [2m(m + 1) + 1]^2.$$

Cette règle est exactement celle que Proclus, dans son Commentaire du premier Livre des Éléments d'Euclide (Éd. de Bâle, pag. 111; traduction de Barocius, Padoue 1560, pag. 271) attribue à Pythagore, et qu'il énonce de la manière suivante : « (Cette méthode) pose le nombre donné impair comme le plus petit des deux côtés comprenant l'angle droit; prenant le carré du même nombre, et en retranchant une unité, elle pose la moitié du reste comme le plus grand des deux côtés comprenant l'angle droit; ajoutant de nouveau à celui-ci une unité, elle forme le côté qui reste, à savoir l'hypoténuse. » Or, désignant le nombre donné impair par $2m + 1$, on a précisément

$$\begin{aligned} 2m + 1 &= m + (m + 1) \\ \frac{(2m + 1)^2 - 1}{2} &= 2m(m + 1) \\ \frac{(2m + 1)^2 - 1}{2} + 1 &= 2m(m + 1) + 1 \end{aligned}$$

Ces expressions montrent en même temps que cette formule donne toujours des triangles primitifs ; car $2m + 1$ est premier à $(2m + 1)^2 - 1$ et à $(2m + 1)^2 + 1$; et $\frac{(2m + 1)^2 - 1}{2}$, $\frac{(2m + 1)^2 + 1}{2}$ sont premiers entre eux comme ayant pour différence l'unité.

9.

Et (si vous prenez) trois nombres quelconques, se suivant en succession continue d'après l'ordre naturel, le produit du premier de ces (nombres) par le troisième est un côté d'un de ces triangles, et le produit du (nombre) moyen par deux est toujours le second côté du même triangle.

Si l'on additionne le premier et le troisième (nombre), il en résulte pareillement le second côté, parce que tout nombre est la moitié des (deux nombres) qui l'avoisinent. Il revient donc au même que nous multipliions le (nombre) moyen par deux, ou que nous additionnions les deux extrêmes.

(Il faut remarquer) cependant que, si le premier et le dernier des trois nombres sont impairs, il en résulte par cette opération un triangle qui est souche de son espèce; et si le premier et le dernier sont pairs, il en résulte par cette opération un triangle qui appartient à une espèce qui s'est déjà présentée antérieurement.

S'il en est ainsi, il résulte de cette proposition que, si l'on multiplie un nombre pair quelconque par deux, le produit est un côté d'un de ces triangles qui est souche de son espèce; et si on multiplie l'un par l'autre les deux nombres impairs qui se trouvent placés des deux côtés de ce nombre pair, le produit est le second côté du même triangle.

Par exemple (prenons) un, deux, trois. Le produit de deux par deux est un côté d'un triangle (rectangle), c'est quatre; et l'unité fois trois est trois, ce qui est le second côté du même triangle. De même (prenons) trois, quatre, cinq. Le produit du quatre par deux est huit, ce qui est un côté d'un triangle (rectangle); et le produit du trois par cinq est quinze, ce qui est le second côté du même triangle. Et pareillement des autres.

Quant aux (cas où les deux extrêmes sont des nombres) pairs, (prenons) par exemple deux, trois, quatre. Le produit du trois par deux est six, ce qui est un côté d'un triangle (rectangle); et le produit du deux par le quatre est huit, ce qui est le second côté du même triangle; si ce n'est que ce triangle est de l'espèce du triangle souche qui est trois et quatre avec l'hypoténuse cinq. Entendez cela, si Dieu le permet.

OBSERVATIONS.

Prenant trois nombres consécutifs $m-1$, m, $m+1$, on a

$$[(m-1)(m+1)]^2+[2m]^2=[m^2+1]^2.$$

Cette règle est identique à celle que Proclus, à l'endroit que je viens de citer, attribue à Platon, et qu'il énonce en ces termes : « La méthode de Platon prend pour point de départ les nombres pairs. Car prenant un nombre pair donné, elle le pose comme un des deux côtés comprenant l'angle droit; et partageant ce nombre en deux parties égales, prenant le carré de la moitié, et ajoutant une unité au carré, elle produit l'hypoténuse; mais retranchant une unité du carré, elle produit le second des deux côtés qui comprennent l'angle droit. » Cela revient à poser la formule

$$(m^2-1)^2+(2m)^2=(m^2+1)^2.$$

Il est évident que, si m est un nombre impair $2\mu+1$, le triangle n'est pas primitif, parce que les trois côtés sont divisibles par 2; car on a dans ce cas

$$m^2-1=2(2\mu^2+2\mu),\quad 2m=2(2\mu+1),\quad m^2+1=2(2\mu^2+2\mu+1).$$

Au contraire si m est pair, $m^2 - 1$ et $m^2 + 1$ sont impairs et par conséquent premiers entre eux; car ayant pour différence 2, s'ils avaient un facteur commun, ce ne pourrait être que 2; comme, en outre, $2m$ est en ce cas premier à $m^2 + 1$ et à $m^2 - 1$, ceux-ci n'étant ni pairs, ni divisibles par m: il s'ensuit que, si m est pair, le triangle produit est toujours primitif.

On voit du reste que, dans le cas où m est impair, les moitiés des côtés du triangle que l'on obtient, sont les côtés d'un triangle rectangle primitif formé d'après la règle de Pythagore.

10.

(Si l'on prend) quatre nombres consécutifs quelconques suivant l'ordre naturel, et si on multiplie l'un des deux moyens par l'autre (pris) deux fois, le résultat est un côté d'un de ces triangles qui est souche de son espèce; et si l'on additionne les deux extrêmes, le résultat est le second côté du même triangle.

Par exemple (prenons) un, deux, trois, quatre. Le produit de deux par trois (pris) deux fois, est douze, ce qui est un côté d'un de ces triangles; et la somme de l'un et du quatre qui sont les deux extrêmes, est cinq, ce qui est le second côté du même triangle. Il en est de même des autres nombres. Donc (soient proposés) deux, trois, quatre, cinq. Si vous multipliez le trois par le quatre (pris) deux fois, c'est vingt quatre, ce qui est un côté d'un triangle (rectangle); et si vous additionnez le deux et le cinq, c'est sept, ce qui est le second côté du même triangle.

Il est indifférent pour cette règle, et en opérant de cette manière, que ce soient quatre, six, ou huit nombres consécutifs,| parce que la somme des deux termes extrêmes est toujours exactement la même, que ceux-ci soient rapprochés ou éloignés du milieu. Seulement, si (ces nombres) s'écartent de plus en plus des deux (termes) moyens (en augmentant) de deux en deux nombres, vous aurez successivement des (triangles rectangles d') espèces différentes, lorsque les deux (termes) moyens changent; mais lorsque ceux-ci restent identiquement les mêmes, le triangle ne change point du tout, quelle que soit d'ailleurs la distance du milieu (de la suite des nombres choisis aux deux nombres extrêmes). fol. 83 *recto.*

Exemples du cas où les deux (termes) moyens changent. Un, deux, trois, quatre : les deux (termes) moyens sont deux et trois. Un, deux, trois, quatre, cinq, six : les deux (termes) moyens sont trois et quatre. Pareillement un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit : les deux (termes) moyens sont quatre et cinq. Chacun des triangles qui résultent de ces (termes) moyens est d'une espèce différente de celle des autres.

Exemples du cas où ne changent ni les deux (termes) moyens, ni le triangle. Trois, quatre, cinq, six : les deux (termes) moyens sont quatre et cinq. Et si vous posez six nombres dont le premier est deux et le dernier sept, ou huit nombres dont le premier est un et le dernier huit, les deux (termes) moyens restent exactement les mêmes, et (on n'obtient qu') un seul triangle. Entendez cela, si Dieu le permet.

OBSERVATIONS.

La règle énoncée dans le premier alinéa du présent numéro est identique à celle du N° 8. Car prenons quatre nombres consécutifs : $m - 1$, m, $m + 1$, $m + 2$. La somme des deux termes extrêmes et le double produit des deux termes moyens sont respectivement

$$2m + 1 \quad \text{et} \quad 2m(m + 1),$$

c'est à dire exactement les mêmes expressions que celles que l'on a trouvées pour les deux cathètes dans les observations 8.

Quant aux deux autres remarques de l'auteur, il est évident que, tant que les deux termes moyens restent les mêmes, la distance des deux termes extrêmes est indifférente, parce que $(m-1)+(m+2) = (m-1-\alpha)+(m+2+\alpha)$; mais que le changement des termes moyens entraine celui du triangle, parce que $2(m+\beta)(m+\beta+1) > 2m(m+1)$ et aussi $> 2m+1$, tandis que, quand même on pourrait faire $2(m-\beta)(m-\beta+1) = 2m+1$ (ce qui est impossible, parce qu' un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair), on aurait pourtant $(m-\beta-1)+(m-\beta+2) < 2m(m+1)$.

11.

Si nous allions chercher les autres manières de produire ces triangles, cela augmenterait considérablement l'étendue de ce traité.

Car (si nous prenons) trois nombres impairs consécutifs quelconques suivant l'ordre naturel, tels que trois, cinq et sept, ou cinq, sept et neuf: le (nombre) moyen multiplié par quatre est toujours un côté d'un de ces triangles qui est souche de son espèce, et le produit de l'un des deux extrêmes par l'autre est le second côté du même triangle.

Et (si nous prenons) quatre nombres impairs quelconques suivant le même ordre, le produit de l'un des deux (nombres) moyens par l' autre est un côté d'un de ces triangles qui est souche de son espèce, et la somme des deux extrêmes est le second côté du même triangle.

Mais ce que nous venons de donner sur cette matière est suffisant, attendu que rien de ce dont on a besoin, n'a été passé sous silence.

La méthode au moyen de laquelle vous pourrez reconnaître que vous avez obtenu tous les (triangles) que vous vous étiez proposé de chercher, de sorte qu'il ne se présente pour vous aucune difficulté ni aucune incertitude dans cette opération, est celle que je vous ai déjà expliquée, (et qui consiste) à connaître les hypoténuses et leur ordre d'après la suite que je vous ai définie, et à les mettre sous vos yeux, afin que vous rapportiez à chacune de ces hypoténuses les côtés qui y appartiennent, quelle que soit celle des méthodes ci-dessus mentionnées par laquelle ils aient été obtenus. Et cela vous sera facile, si Dieu le permet.

OBSERVATIONS.

Prenant trois nombres impairs consécutifs

$$2m-1,\quad 2m+1,\quad 2m+3$$

on a

$$1)\qquad [4(2m+1)]^2 + [(2m-1)(2m+3)]^2 = [(2m+1)^2+4]^2$$

ce qui est la première des deux règles énoncées par l'auteur; elle donne évidemment lieu à un triangle rectangle primitif; car les nombres $2m-1$, $2m+1$, $2m+3$ étant impairs et premiers entre eux, les côtés $4(2m+1)$ et $(2m-1)(2m+3)$ sont également premiers entre eux.

On peut généraliser cette formule en prenant les trois nombres

$$bm+c-b,\quad bm+c,\quad bm+c+b,$$

qui donnent lieu au triangle rectangle

$$2)\qquad [2b(bm+c)]^2 + [(bm+c-b)(bm+c+b)]^2 = [(bm+c)^2+b^2]^2.$$

La formule 2) se réduit à la formule 1) pour $b=2$, $c=1$; et elle donne la règle de Platon, si l'on fait $b=1$, $c=0$.

Prenant quatre nombres impairs consécutifs

$$2m-3\,,\quad 2m-1\,,\quad 2m+1\,,\quad 2m+3$$

on a

3) $$[(2m-1)(2m+1)]^2+[(2m-3)+(2m+3)]^2=[(2m)^2-1]^2+[2(2m)]^2=[(2m)^2+1]^2$$

ce qui est la seconde des deux règles énoncées par l'auteur. On voit que les triangles rectangles représentés par cette formule sont compris parmi ceux que donne la règle de Platon, et que ce sont tous ceux de ces derniers triangles rectangles qui sont primitifs. Comparer les observations 9.

Du reste toutes les règles particulières proposées dans les numéros 8 à 11, sont contenues dans la formule précédemment proposée

$$[(a+b)(a-b)]^2+[2ab]^2=[a^2+b^2]^2\,;$$

car en y faisant $a = bm + c$, on obtient la formule 2); en faisant $a - b = 1$, la règle de Pythagore; et en faisant $b = 1$, la règle de Platon.

Le dernier alinéa du présent numéro rappelle un passage du N° 6 (voir ci-dessus pag. 9, lig. 19 à 30) et le commencement du N° 7. Quant à la suite des nombres qui peuvent être hypoténuses de triangles rectangles primitifs, il en a été question ci-dessus aux numéros 3 et 4.

12.

Parmi les (propriétés) qui se présentent dans ces triangles, et qui leur sont naturellement inhérentes, (nous devons mentionner) aussi que, si les nombres impairs sont rangés à partir du trois suivant l'ordre | naturel, que l'on divise fol. 83 *verso.*
chacun de ces nombres en deux parties dont l'une dépasse l'autre seulement d'une unité, et que l'on forme au moyen de ces parties les côtés d'un de ces triangles de la manière que nous avons décrite : alors l'aire du triangle qui résulte du premier nombre, à savoir du trois, est égale à la moitié de la somme de ses côtés; l'aire du triangle qui résulte du second nombre, à savoir du cinq, est égale à la somme de tous ses côtés; l'aire du triangle qui résulte du troisième nombre, à savoir du sept, est égale à la somme de ses côtés une fois et demie; puis pour le quatrième l'aire est égale à deux fois les côtés, pour le cinquième à deux fois et demie, et ainsi de suite en augmentant toujours de la moitié d'une fois, et en montant dans les nombres jusqu'où vous voudrez. Ceci est la première section (de triangles).

Dans la seconde section, qui est celle où l'excès de l'une des deux parties (au moyen desquelles on forme le triangle) sur l'autre [est égal à trois], comme pour le cinq lorsqu'on le divise en un et quatre, ou le sept lorsqu'on le divise en deux et cinq : l'aire du triangle qui résulte du premier de ces nombres, est égale à la somme de ses côtés une fois et demie; pour le second nombre c'est trois fois, pour le troisième quatre fois et demie, pour le quatrième six fois, et ainsi de suite, chaque nombre ajoutant à celui qui le précède une fois et demie, pendant que vous monterez dans les nombres jusqu'où vous voudrez.

Dans la troisième section le premier (triangle a pour aire) deux fois et demie (la somme des côtés), puis on ajoute continuellement deux fois et demie.

Dans la quatrième section le premier (triangle a pour aire) trois fois et demie (la somme des côtés), puis on ajoute continuellement trois fois et demie.

En général entre deux sections (consécutives) quelconques l'augmentation du multiple (de la somme des côtés qui exprime l'aire) est d'une fois; ensuite le

nombre ainsi déterminé reste fixe (comme différence) entre (les aires des triangles correspondant à) deux nombres (impairs consécutifs) quelconques (relativement à la même section).

OBSERVATIONS.

Partageant le nombre impair $2n+1$ dans les deux parties

$$n-\alpha, \quad n+\alpha+1,$$

formant au moyen de ceux-ci, d'après la règle donnée par l'auteur au numéro 6, le triangle rectangle

$$\Big[\{(n+\alpha+1)-(n-\alpha)\}\{(n+\alpha+1)+(n-\alpha)\}\Big]^2+\Big[2(n+\alpha+1)(n-\alpha)\Big]^2=\Big[(n+\alpha+1)^2+(n-\alpha)^2\Big]^2,$$

et désignant l'aire du triangle par A et son périmètre par P, on a

$$A=\{(n+\alpha+1)^2-(n-\alpha)^2\}(n+\alpha+1)(n-\alpha)=(2n+1)(2\alpha+1)(n+\alpha+1)(n-\alpha)$$

$$P=2(n+\alpha+1)^2+2(n+\alpha+1)(n-\alpha)=2(2n+1)(n+\alpha+1)$$

d'où

$$\frac{A}{P}=\frac{(2\alpha+1)(n-\alpha)}{2}.$$

Pour avoir les expressions relatives à la $p^{ième}$ section on fera $\alpha=p-1$, et pour avoir l'expression relative au $q^{ième}$ triangle de la $p^{ième}$ section on fera $n=p+q-1$, de sorte que $n-\alpha=q$.

Il suit de là que la différence de deux valeurs consécutives de $\frac{A}{P}$ appartenant à la même (soit à la $p^{ième}$) section est $\frac{2p-1}{2}$, donc constante pour cette section; que la différence de deux valeurs de $\frac{A}{P}$ prises au même (soit au $q^{ième}$) rang dans deux sections consécutives est q, et pour le premier rang 1; enfin on voit que la différence constante des valeurs de $\frac{A}{P}$ pour la $p^{ième}$ section, est égale à la première valeur de $\frac{A}{P}$ dans cette section, cette valeur étant pareillement $\frac{2p-1}{2}$.

13.

Lorsqu'on double les côtés d'un de ces triangles, l'aire du second triangle est égale à quatre fois celle du premier, et le rapport de l'aire à (la somme des) côtés est le double du rapport (qui a lieu dans le) premier (triangle). Et d'autant de fois vous augmentez les côtés, d'autant de fois est augmenté le rapport (qui a lieu dans le) premier (triangle). Donc (au cas où l'on a doublé les côtés), si (dans) le premier (triangle l'aire est) égale à (la somme des) côtés, (dans) le second (elle) en est le double; et si (dans) le premier (elle) en est la moitié, (dans) le second (elle) est égale à la (somme des côtés).

Et lorsqu'on ajoute aux côtés des parties aliquotes, ou qu'on en ôte des parties aliquotes, le rapport des aires (aux périmètres) est (changé) dans la même proportion.

Ceci donne lieu à l'invention de problèmes (où il est question) de rapports des aires aux (sommes des) côtés, égaux dans les triangles et différents relativement aux souches.

OBSERVATIONS.

Le texte de ce numéro manque un peu de clarté par suite d'une trop grande concision. Toutefois le sens n'est pas douteux.

Désignant par x, y, z les côtés d'un triangle rectangle, par A et P son aire et son périmètre, et par A′ et P′ l'aire et le périmètre du triangle dont les côtés sont

$$x'=x\pm\frac{m}{n}x, \quad y'=y\pm\frac{m}{n}y, \quad z'=z\pm\frac{m}{n}z.$$

on a

$$A' = \left(\frac{n \pm m}{n}\right)^2 A, \quad P' = \frac{n \pm m}{n} P,$$

d'ou

$$\frac{A'}{P'} = \frac{n \pm m}{n} \cdot \frac{A}{P},$$

donc

$$\frac{A' : P'}{A : P} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Lorsque en particulier $x' = 2x$, $y' = 2y$, $z' = 2z$, on aura

$$A' = 4A, \quad P' = 2P, \quad \frac{A'}{P'} = 2\,\frac{A}{P};$$

donc

$$A' = 2P' \text{ si } A = P, \text{ et } A' = P' \text{ si } A = \tfrac{1}{2} P.$$

Quant aux problèmes auxquels l'auteur fait allusion dans le dernier alinéa, il paraîtrait qu'on s'y proposait de trouver deux triangles rectangles non primitifs dans lesquels la valeur du rapport A : P était la même, tandis que cette valeur était différente dans les deux triangles primitifs dont les premiers étaient dérivés. C'est ce qu'on obtient en multipliant les côtés du premier des deux triangles primitifs par $(2\alpha' + 1)(n' - \alpha')$ et ceux du second par $(2\alpha + 1)(n - \alpha)$. Ces triangles devaient en outre satisfaire à d'autres conditions qui variaient d'un problème à l'autre. Mais je donne cette explication comme une simple conjecture.

14.

Parmi les (propriétés) qui sont naturellement inhérentes à ces (triangles, nous devons mentionner) que l'excès de l'hypoténuse sur l'un des deux côtés qui comprennent l'angle (droit), à savoir celui des deux qui est pair, est toujours nécessairement un nombre dont on peut extraire la racine, et que ce nombre dont on peut extraire la racine est la différence entre les deux nombres au moyen desquels on a produit les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle, multipliée par elle-même. En même temps l'excès de l'hypoténuse sur l'autre côté qui est le (côté) impair, est toujours nécessairement le double d'un nombre dont on peut extraire la racine, lequel nombre dont on peut extraire la racine résulte de la multiplication du plus petit des deux nombres | au moyen desquels on a *fol. 84 recto.*
produit les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle, par lui-même.

OBSERVATION.

On a en effet $(a^2 + b^2) - 2ab = (a - b)^2$ et $(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) = 2b^2$.

15.

Nous avons déjà dit, dans le premier chapitre, qu'il faut, pour connaître les côtés qui comprennent l'angle droit, diviser l'hypoténuse au moyen de laquelle on a besoin de connaître ces (côtés), dans ses deux parties dont on peut extraire la racine. Il est donc nécessaire pour cela (de posséder) une méthode expéditive qui rende cette recherche facile.

Cette (méthode) est (fondée sur ce) que vous savez déjà, (à savoir) que les hypoténuses de ces triangles sont toujours exclusivement impaires; et les (nombres) impairs sont seulement les suivants : un, trois, cinq, sept, neuf.

Sachez donc que l'unité (combinée) avec les dizaines, se divise en cinq et six seulement; et si (le nombre) dépasse cent, il peut se diviser en (l'unité) même et cent ou des centaines, lorsque celles-ci sont de nature qu'on puisse en extraire la racine.

Le trois (combiné) avec les dizaines et les centaines, est divisible seulement en quatre et neuf.

Le cinq lui-même se divise en un et quatre. (Combiné) avec les dizaines, il se divise de la même manière, et en six et neuf; et avec les centaines pareillement. Il se peut aussi qu'il soit divisible en lui-même multiplié par lui-même, et des centaines dont on peut extraire la racine.

Le sept se divise, (combiné) avec les dizaines et les centaines, en un et six seulement.

Le neuf (combiné) avec les dizaines, se divise en cinq et quatre seulement. Lorsque (le nombre) dépasse cent, il se peut qu'il soit divisé dans le (neuf) même et cent ou des centaines, lorsque celles-ci sont de nature qu'on puisse en extraire la racine.

Conséquemment, si vous voulez diviser un nombre en deux nombres dont on puisse extraire la racine, ne cherchez pour chaque nombre que ce qui peut s'y trouver, en laissant de côté le reste. Cela facilitera la découverte de la chose cherchée, si telle est la volonté de Dieu.

OBSERVATIONS.

Les premières lignes du présent numéro me paraissent contenir une confirmation de ce que j'ai dit ci-dessus (observations 1.), à savoir que la partie perdue de ce fragment, qui formait le commencement du traité, n'était pas d'une étendue considérable; car l'auteur dit ici que la règle de trouver les deux côtés qui comprennent l' angle droit, en décomposant l' hypoténuse en deux carrés, faisait partie du premier chapitre, et cette règle est proposée ci-dessus dans le N°. 5. On peut conclure de là que ce qui nous manque de ce traité, ne formait qu'une partie, et même une assez petite partie du premier chapitre. Le manuscrit 952 *bis* Suppl. ar. n'offre plus de trace de cette division en chapitres mentionnée ici; la division en numéros adoptée dans la présente traduction, a été faite par moi, d'après la nature du contenu, pour faciliter l'intercalation des observations. Le manuscrit présente seulement en beaucoup d'endroits un petit signe composé de trois points et marquant des sections. mais ne correspondant évidemment pas aux chapitres dont il s'agit ici, et qui seraient déterminés au moyen de ce signe d'une façon fort arbitraire. On aura remarqué aussi que les théorèmes énoncés ne sont pas accompagnés de démonstrations, chose assez rare dans les traités mathématiques arabes. Il n'est pas impossible que le géomètre Alsidjzi, qui paraît avoir copié et recueilli pour son propre usage les morceaux contenus dans le ms. N°. 952 *bis*, ait supprimé la division en chapitres et les démonstrations d'un original plus complet qu'il avait sous les yeux. Mais ce n'est qu'une conjecture. En tout cas le morceau que la copie d'Alsidjzi nous a conservé, est antérieur à l'an 972 de notre ère, et un document précieux pour l'histoire des mathématiques chez les Arabes.

Le présent numéro nous fournit une nouvelle preuve de cette dernière assertion, en nous présentant en quelque sorte la première trace d'une considération des résidus quadratiques. Voici, en effet, sur quelles raisons est fondée la règle donnée par l'auteur pour abréger la recherche des couples de carrés dans lesquels on pourra décomposer des hypoténuses proposées. Il est évident que le premier chiffre à droite d'un nombre carré est résidu quadratique par rapport au module 10, ou 0; le premier chiffre d'un nombre qui est la somme de deux carrés, sera donc un des nombres qu' on obtient en additionnant deux à deux les nombres 0, 1, 4, 5, 6, 9, et en retranchant 10 de la somme, s'il y a lieu. On obtient ainsi

$0 + 0 \equiv 0$	$1 + 1 \equiv 2$	$4 + 4 \equiv 8$	$5 + 5 \equiv 0$	$6 + 6 \equiv 2$	$0 + 0 \equiv 8$
$0 + 1 \equiv 1$	$1 + 4 \equiv 5$	$4 + 5 \equiv 9$	$5 + 6 \equiv 1$	$6 + 9 \equiv 5$	
$0 + 4 \equiv 4$	$1 + 5 \equiv 6$	$4 + 6 \equiv 0$	$5 + 9 \equiv 4$		
$0 + 5 \equiv 5$	$1 + 6 \equiv 7$	$4 + 9 \equiv 3$			
$0 + 6 \equiv 6$	$1 + 9 \equiv 0$				
$0 + 9 \equiv 9$					

Ce tableau montre que chacun des nombres depuis 0 jusqu'à 0 ne correspond, comme premier chiffre d'une somme de deux carrés, qu'à un nombre très-restreint de combinaisons des deux premiers chiffres de deux nombres carrés; c'est ce qu'on voit plus clairement encore en retournant les formules de ce tableau de la manière suivante :

$0 \equiv 0 + 0,\ 1 + 9,\ 4 + 6,\ 5 + 5$	$5 \equiv 0 + 5,\ 1 + 4,\ 6 + 9$
$1 \equiv 0 + 1,\ 5 + 6$	$6 \equiv 0 + 6,\ 1 + 5$
$2 \equiv 1 + 1,\ 6 + 6$	$7 \equiv 1 + 6$
$3 \equiv 4 + 0$	$8 \equiv 4 + 4,\ 0 + 9$
$4 \equiv 0 + 4,\ 5 + 0$	$0 \equiv 0 + 9,\ 4 + 5$

Ainsi, soit proposée une hypoténuse dont le premier chiffre est 3 ; pour trouver les carrés dans lesquels elle est décomposable, on n'aura à essayer que des carrés dont les premiers chiffres sont 4 et 9. Ce second tableau explique complètement les règles données par l'auteur, si l'on remarque encore que 0, comme premier chiffre d'un carré, appartient toujours à des centaines au moins, jamais à des dizaines, attendu qu'un nombre carré ne peut commencer que par un nombre pair de zéros.

16.

Ayant fait cette observation relativement au (nombre) impair, nous devons mentionner aussi (ce qui concerne) les (nombres) pairs, quoique nous n'ayons pas besoin d'en parler en cet endroit, afin que notre discussion soit générale (et s'étende) aux deux (espèces de) nombres simultanément. Or, les nombres pairs sont deux, quatre, six, huit, dix.

Le deux se divise en un et un; et (combiné) avec les dizaines et les centaines, de la même manière, et en six et six.

Le quatre (combiné) avec les dizaines, se divise en cinq et neuf seulement; si (le nombre) dépasse cent, il est possible qu'il se divise dans le (quatre) même et cent ou des centaines dont on peut extraire la racine.

Le six (combiné) avec les dizaines et les centaines, se divise en un et cinq seulement.

Le huit se divise en quatre et quatre; et (combiné) avec les dizaines et les centaines, de la même manière, et en neuf [et neuf].

Le dix se divise en un et neuf; et (combiné) avec les dizaines et les centaines, de la même manière, et en cinq et cinq, et en quatre et six.

OBSERVATION.

On voit par le second tableau des observations du numéro précédent que l'auteur oublie de faire mention des décompositions qui correspondent à $6 \equiv 0 + 6$ et $0 \equiv 0 + 0$. Exemples: $116 = 100 + 16$, $200 = 100 + 100$.

17.

Sachez que tous ces triangles rectangles (en nombres) rationuels (jouissent de la propriété que) si l'on multiplie l'hypoténuse d'un deux par elle-même, et qu'on y ajoute ce qui résulte de la multiplication de l'un des deux côtés qui comprennent l'angle droit, par l'autre (pris) deux fois, il provient de cela un nombre qui a une racine rationnelle; et lorsqu'on retranche le produit de l'un des deux
fol. 84 verso. côtés par l'autre (pris) deux fois de | l'hypoténuse multipliée par elle-même, il résulte après cela un nombre qui a (également) une racine rationnelle.

La raison de cela, pour (le cas de) l'addition, est que, si une ligne quelconque est divisée en deux parties, le produit de chacune des deux parties par elle-même et le produit de l'une d'elles par l'autre (pris) deux fois, sont (ensemble) égaux au produit de la ligne entière par elle-même. Or, [le carré de] l'hypoténuse est dans chacun de ces triangles (la somme) des produits de chacun des deux côtés par lui-même; donc, si l'on y ajoute le produit de l'un d'eux par l'autre (pris) deux fois, la somme de cela est égale au produit des deux côtés (considérés) ensemble comme une seule ligne, par eux-mêmes; et puisque chacun d'eux est rationnel, la somme est rationnelle.

Quant à la raison pour (le cas de) la soustraction, (c'est) que, si une ligne quelconque est divisée en deux parties, la somme du produit de la ligne par elle-même et (du produit) de l'une des deux parties par elle-même, est égale au produit de la ligne par cette partie (pris) deux fois et au produit de l'autre partie par elle-même. Donc, si nous mettons le plus grand des côtés (comprenant l'angle droit) du triangle à la place de la ligne divisée, et si nous posons le plus petit côté comme une de ses deux parties, il reste l'autre partie comme la différence des deux côtés, laquelle est rationnelle; car chacun des deux côtés est rationnel, donc leur différence est également rationnelle. Or, comme la somme du produit de la ligne (entière), qui est l'un des deux côtés, par elle-même et du produit de l'une de ses parties, qui est l'autre côté, par elle-même est (égale à) l'hypoténuse (multipliée) par elle-même, et que cela est égal (aussi) au produit de la ligne (entière) par cette partie (pris) deux fois, qui est le produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, et au produit de l'autre partie par elle-même, (il s'ensuit que) le produit de l'hypoténuse par elle-même est égal au produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois et au produit de la différence des deux côtés par elle-même. Conséquemment, si on retranche de l'hypoténuse (multipliée) par elle-même le produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, il reste la différence des deux côtés multipliée par elle-même; et ce (carré) est rationnel, parce que sa racine est rationnelle.

La démonstration de cela est exposée dans le second livre de l'ouvrage d'Euclide, et la répétition de ce que les anciens ont déjà expliqué dans leurs ouvrages serait une rédondance vide de sens.

OBSERVATION.

Si l'on a 1) $x^2 + y^2 = z^2$,

il s'ensuit immédiatement

2) $z^2 + 2xy = (x + y)^2$, 3) $z^2 - 2xy = (x - y)^2$.

En remplaçant dans l'équation 2) x par a, y par b, et dans l'équation 3) x par $a + b$, y par a, donc $x - y$ par b, on aura

4) $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ 5) $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$

ce qui est la traduction en formules algébriques des énoncés des propositions 4e. et 7e. du II.e livre des Éléments d'Euclide.

18.

Ceci est aussi l'artifice le plus convenable pour (résoudre le problème de trouver) une quantité qui a une racine, et telle que, si l'on y ajoute un nombre connu, la somme a une racine, et que si l'on en retranche exactement le même nombre, le reste a une racine.

C'est encore (une propriété) inhérente aux triangles premieres que, pour tous ces nombres qui résultent comme sommes après l'addition, et comme restes après la soustraction, et qui ont des racines, le cinq ne se présente (comme premier chiffre à droite) dans aucune de leurs racines, et à cause de cela tous (ces nombres) ont nécessairement (pour premier chiffre) l'unité ou le neuf, et le cinq ne s'y trouve (comme premier chiffre) point du tout.

Nous en voyons un exemple dans le triangle dont l'hypoténuse est cinq, et dont les deux côtés (comprenant l'angle droit) sont quatre et trois, lequel est le premier. Si nous multiplions cinq par cinq, il résulte vingt cinq; et si nous multiplions l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, il résulte vingt quatre. Or, si nous ajoutons cela à vingt cinq, il résulte quarante neuf, ce dont la racine, à savoir sept, est égale à la somme des deux côtés. Et si nous retranchons le vingt quatre du vingt cinq, il reste un, ce dont la racine est un ; et cela est égal à l'excès de l'un des deux côtés sur l'autre.

Il en est de même du second triangle dont l'hypoténuse est treize, ce qui (multiplié) par lui-même donne cent soixante neuf. Les deux côtés du (même triangle qui comprennent l'angle droit) sont cinq et douze, et le produit de l'un d'eux par l'autre (pris) deux fois est cent vingt. | Or, si nous ajoutons cent vingt *fol. 85 recto.* à cent soixante neuf, il résulte deux cent quatre-vingt neuf, ce dont la racine est dix-sept ; et cela est égal à la somme des deux côtés. Et si nous retranchons cent vingt de cent soixante neuf, il reste quarante neuf, ce dont la racine est sept; et cela est l'excès de l'un des deux côtés sur l'autre.

Il en est de même du reste de ces triangles, en suivant la même marche.

Donc, si nous avons trouvé un des triangles rectangles dont les côtés (comprenant l'angle droit) et l'hypoténuse sont (des nombres) rationnels, nous avons trouvé en même temps un nombre dont on peut extraire la racine (et tel que) lorsqu'on y ajoute un nombre connu, la (somme) qui en résulte a une racine; et lorsqu'on en retranche le même nombre connu, le reste a une racine.

Et si vous voulez former pour une des espèces de ces triangles un (triangle) dérivé au moyen des multiples ou des parties, vous multipliez chacun des côtés du triangle qui est la souche et le premier de son espèce, par le nombre des

multiples auxquels vous voulez l'élever, ou par le nombre des parties auxquelles vous voulez l'abaisser, et vous faites de ce qui resulte des côtés (ainsi multipliés) un triangle; celui-ci sera de la même espèce.

OBSERVATIONS.

L'auteur énonce ici en termes explicites *le problème des nombres congruents*, c'est à dire le problème de satisfaire simultanément aux deux équations indéterminées

$$1)\quad s^2 + k = u^2, \qquad 2)\quad s^2 - k = v^2$$

k étant un nombre donné. Ce qui donne à ce problème un intérêt tout particulier, c'est qu'il est intimement lié à plusieurs questions difficiles et fondamentales de l'analyse indéterminée qui ont été traitées par Fermat, Euler, Lagrange et Legendre. Aussi n'a-t-il pas manqué de fixer l'attention des historiens des mathématiques dès qu'ils en avaient remarqué l'existence dans les ouvrages de Léonard de Pise et de Luca Pacioli. C'est ainsi qu'il a été l'objet d'une étude approfondie de la part de Cossali (*Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, Vol. I, pag. 125 à 145), et qu'il a été signalé par M. Libri dans son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (Vol. III, pagg. 139, 140 et 277 à 283). Il acquit une nouvelle importance lorsque M. le Prince Balthasar Boncompagni découvrit et publia trois ouvrages de Léonard de Pise, dont deux entièrement inconnus auparavant, et dont le troisième est le célèbre « Traité des nombres carrés » que pendant longtemps on avait cru complétement perdu, mais que le zèle infatigable de l'illustre savant que je viens de nommer, réussit à rendre à la science. Le Prince Boncompagni ne tarda pas à appeler l'attention des géomètres sur les parties du Traité des nombres carrés où Léonard de Pise résout le problème des nombres congruents, dans un mémoire intitulé : *Intorno alla risoluzione delle equazioni simultanee $x^2 + h = y^2$, $x^2 - h = z^2$ Nota di Baldassarre Boncompagni*, et publié dans les *Annali di scienze matematiche e fisiche compilati da Barnabo Tortolini*, Tomo sesto, Roma 1855, pages 135 à 154. Enfin M. Genocchi a consacré à la théorie des nombres congruents une partie considérable d'un mémoire intitulé : *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni note analitiche di Angelo Genocchi*. (Voir le même volume des *Annali di scienze mat. e fis.* pages 273 à 320).

On voit maintenant que ce problème a occupé les géomètres arabes dès la seconde moitié du X.e siècle de notre ère (et probablement avant cette époque). Il est vrai que le problème de résoudre les deux équations indéterminées simultanées

$$s^2 + w = u^2 \qquad\qquad s^2 - w = v^2$$

se trouve déjà chez Diophante (voir *Arithmetica* V, 9. III, 22. et comparer III, 9. II, 20. IV, 45) qui n'a pas manqué de remarquer que tout triangle rectangle en nombres rationnels fournit une solution du problème. Mais ce qui distingue le point de vue où se place l'auteur arabe, c'est qu'il remplace l'inconnue w par un nombre donné k; et qu'il a reconnu que le moyen de traiter le problème dans ce cas, est de dresser une table des solutions que fournissent les triangles rectangles en nombres entiers, afin qu'on puisse trouver dans cette table soit le nombre k même, soit ce nombre multiplié par un carré, et la solution ou les solutions correspondantes. C'est en effet la meilleure méthode possible, à moins qu'on ne s'attende à voir les Arabes trouver du premier coup : et les divers moyens particuliers qui permettent dans certains cas de reconnaître immédiatement si un nombre donné est ou n'est pas nombre congruent; et le principe de Fermat qui consiste à ramener des problèmes d'analyse indéterminée à des problèmes de même forme satisfaits par des nombres plus petits; et les méthodes de Fermat et de Lagrange pour traiter les équations biquadratiques dont la solution donne celle du problème exprimé par les équations simultanées 1) et 2).

L'auteur arabe a reconnu, en outre, qu'il suffit pour la construction de la table des nombres congruents, de former les triangles rectangles primitifs; mais d'un autre côté il n'exclut pas de sa considération les valeurs fractionnaires, ainsi que nous le voyons par l'alinéa du présent numéro dans lequel il définit des triangles rectangles dérivés dont la formule sera

$$\left(\frac{p}{q}\,x\right)^2+\left(\frac{p}{q}\,y\right)^2=\left(\frac{p}{q}\,z\right)^2,$$

si $x^2 + y^2 = z^2$ est la formule du triangle primitif. Or, nous avons vu que l'auteur a trouvé antérieurement pour les deux cathètes x et y les expressions $(a + b)(a - b)$ et $2ab$, et il vient de donner pour le nombre congruent l'expression $2xy$ par rapport aux triangles primitifs; il s'ensuit donc qu'il

est en possession de l'expression suivante des nombres congruents

$$\frac{p^2}{q^2}\, 4ab\, (a + b)(a - b)$$

qui est la plus générale possible.

On remarquera surtout que le problème des nombres congruents n'est pas placé ici seulement par accident, ou comme un simple corollaire de la théorie des triangles rectangles en nombres rationnels. D'ailleurs nous verrons l'auteur du traité dont on trouvera plus loin la traduction, Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn, dire en propres termes que le but principal et essentiel de la théorie des triangles rectangles rationnels est la résolution du problème des nombres congruents, ce qui prouve assez que les Arabes avaient reconnu toute l'importance de ce problème.

La tendance à dresser des tables des solutions de problèmes indéterminés, tendance dont nous trouverons d'autres exemples dans le traité d'Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn qui contient une table des solutions de l'équation $x^2+y^2=z$, et des tables de certaines solutions de l'équation $x^2+y^2=z^2$; cette tendance dis-je me paraît mériter d'être signalée comme caractéristique pour les mathématiciens arabes. Une autre particularité remarquable qui doit, dans le présent traité, fixer l'attention des historiens des mathématiques, ce sont les essais faits par l'auteur de découvrir pour les nombres qui satisfont à certaines conditions d'analyse indéterminée, des caractères qui consistent au fond à énoncer que ces nombres doivent être de telle forme par rapport à tel module, caractères qui forment la base de la théorie moderne des nombres. C'est ainsi que nous l'avons vu énoncer ci-dessus que les hypoténuses des triangles rectangles primitifs sont toujours de la forme $12m+1$ ou $12m+5$; que, lorsqu'il s'agit de décomposer un nombre donné $10m + r$ en deux carrés $10m' + r'$ et $10m'' + r''$, r' et r'' ne peuvent avoir, à deux exceptions près, qu'une ou deux valeurs déterminées. C'est ainsi qu'il énonce dans le présent numéro que les carrés u^2 et v^2 des équations 1) et 2) ci-dessus, ne sont jamais que de la forme $10m + 1$ ou $10m + 9$, lorsque la solution des équations 1) et 2) est fournie par des triangles rectangles primitifs (ou, comme dit l'auteur, par des triangles rectangles « premiers », awâil).

Pour démontrer cette propriété des carrés u^2 et v^2, rappelons que l'auteur a trouvé (voir observat. 17.)

$$u^2 = z^2 + 2xy = (x + y)^2, \qquad v^2 = z^2 - 2xy = (x - y)^2,$$

et que nous avons vu ci-dessus (observations 3.) que

$$x = (n + \alpha + 1)^2 - (n - \alpha)^2, \qquad y = 2(n + \alpha + 1)(n - \alpha)$$

d'où

$$u = x + y = (2n + 1)^2 - 2(n - \alpha)^2, \qquad v = x - y = (2\alpha + 1)^2 - 2(n - \alpha)^2.$$

Ces expressions montrent en premier lieu que u et v sont des nombres impairs, de sorte que leurs carrés ne peuvent être que de l'une des formes $10m + 1$, $10m + 5$, $10m + 9$; il s'agit de prouver que la forme $10m + 5$ ne peut pas avoir lieu. En effet, si u^2 et v^2 étaient de la forme $10m + 5$, c'est à dire divisibles par 5, u et v devraient également être divisibles par 5. Mais u et v sont de la forme $f^2 - 2g^2$, où f^2 ne peut être par rapport au module 5 que de l'une des formes

$$5m, \quad 5m + 1, \quad 5m + 4$$

et par conséquent $2g^2$ d'une des formes

$$5m, \quad 5m + 2, \quad 5m + 3;$$

il suit de là que $f^2 - 2g^2$ ne peut être divisible par 5 que lorsque f et g, c'est à dire $2n+1$ et $n-\alpha$, ou $2\alpha + 1$ et $n - \alpha$ le sont simultanément. Or, si $2n + 1$ ou $2\alpha + 1$ étaient divisibles par 5 en même temps que $n - \alpha$, $(2n + 1) - (n - \alpha)$ ou $(2\alpha + 1) + (n - \alpha)$ c'est à dire $n + \alpha + 1$ le serait également; donc $n + \alpha + 1$ et $n - \alpha$ auraient un facteur commun, et, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus (observations 3.), le triangle rectangle formé au moyen des nombres $n + \alpha + 1$ et $n - \alpha$, ne serait pas primitif, ce qui est contraire à l'hypothèse.

19.

Nous avons inscrit dans le tableau qui se trouve à la suite de cette dissertation, les nombres impairs au moyen des parties desquels on forme ces triangles, et les parties dans lesquelles on divise ces nombres, (en mentionnant) celles de ces parties qu'on emploie, et celles qu'on laisse de côté à cause de l'existence de facteurs communs, comme nous l'avons expliqué; (nous y avons inscrit en outre) les côtés qui sont engendrés au moyen de ces (parties); les hypoténuses

qui sont les souches de chacune des espèces; ces hypoténuses multipliées par elles-mêmes; ce qui résulte de la multiplication de l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) de chacun des triangles par l'autre (pris) deux fois; ce qui résulte lorsque ce (produit) est ajouté à l'hypoténuse multipliée par elle-même, et la racine de cela; et ce qui résulte de la soustraction du même (produit) de l'hypoténuse multipliée par elle-même, et la racine de cela. Nous avons proposé ces (quantités) pour les hypoténuses dont la première est cinq, et la dernière deux cent cinq, afin que celui qui examine (ce tableau) les ait visiblement sous les yeux, et qu'il puisse y prendre facilement ce dont il a besoin en fait de ces (choses), si telle est la volonté de Dieu.

Les nombres impairs suivant l'ordre.	3	5
Les (deux) parties entières dans lesquelles on divise les nombres impairs, et qui sont les racines des deux parties de l'hypoténuse dont on peut extraire la racine.	2, 1	2, 3
Le côté qui résulte de la multiplication de la somme des deux parties par leur différence, et qui est toujours impair.	3	5
Le côté qui résulte du produit de l'une des deux parties par l'autre, (pris) deux fois, et qui est toujours pair.	4	12
L'hypoténuse, qui est toujours impaire. Chacune de ces hypoténuses suit la précédente d'après l'ordre que nous avons défini. L'hypoténuse est la somme des deux parties multipliées chacune par elle-même.	5	13
fol. 85 verso. Le produit de l'hypoténuse par elle-même, lequel est une quantité qui a une racine, (et qui jouit de la propriété que) si on y ajoute un (certain) nombre, la (somme) a une racine, et si on en retranche le même nombre, ce qui reste a une racine.	25	169
Le produit de l'un des deux côtés par l'autre, (pris) deux fois, ce qui est le nombre tel que si on l'ajoute à l'hypoténuse multipliée par elle-même, ou si on l'en retranche, ce qui résulte de l'addition et de la soustraction, a une racine.	24	120
L'hypoténuse multipliée par elle-même à laquelle on a ajouté ce nombre, laquelle (somme) a une racine.	49	289
La racine de cette (somme), qui est la somme des deux côtés dont on a pris deux fois le produit de l'un par l'autre.	7	17
L'hypoténuse multipliée par elle-même dont on a retranché le nombre ci-dessus, laquelle (différence) a une racine.	1	49
La racine de cette (différence), qui est l'excédant de l'un des deux côtés sur l'autre.	1	7

7 , 49	23 , 529	240	289	17	8	15	4, 1	5
17 , 289	31 , 961	336	625	25	24	7	4, 3	7
1 , 1	41 , 1681	840	841	29	20	21	5, 2	7
23 , 529	47 , 2209	840	1369	37	12	35	6, 1	7
31 , 961	49 , 2401	720	1681	41	40	9	5, 4	9

L'hypoténuse qui suit dans l'ordre après quarante et un, est quarante neuf. Il est impossible que cette (hypoténuse) sous-tende un angle droit dont les deux côtés soient rationnels et souche de leur espèce ; parce qu'elle n'est pas divisible en deux nombres dont on puisse extraire la racine. - Les deux parties du neuf qui suivent après le quatre et le cinq , sont trois et six ; mais ces nombres ont un diviseur commun, et le triangle qui en résulte a pour côtés trente six, vingt sept et quarante cinq; il est donc de l'espèce du premier triangle qui est quatre, trois et cinq.

17 , 289	73 , 5329	2520	2809	53	28	45	7, 2	9
49 , 2401	71 , 5041	1320	3721	61	60	11	6, 5	11
47 , 2209	79 , 6241	2016	4225	65	16	63	8, 1	9
23 , 529	89 , 7921	3696	4225	65	56	33	7, 4	11

L'hypoténuse soixante cinq revient ici dans deux triangles, et tient lieu de l'hypoténuse quarante neuf qui manque.

7 , 49	103 , 10609	5280	5329	73	48	55	8, 3	11

L'hypoténuse qui suit dans l' ordre après soixante treize , est soixante dix-sept; à ce (nombre) la présente opération ne peut pas s'appliquer, parce qu'il n'est pas divisible en deux nombres dont on puisse extraire la racine.

41 , 1681	113 , 12769	5544	7225	85	36	77	9, 2	11
71 , 5041	97 , 9409	2184	7225	85	84	13	7, 6	13

| L'hypoténuse quatre-vingt cinq revient ici dans deux triangles souches, et tient lieu de l'hypoténuse soixante dix-sept qui manque. fol. 86 *recto*

41 , 1681	119, 14161	6240	7921	89	80	39	8, 5	13
7 , 49	137, 18769	9360	9409	97	72	65	9, 4	13
79 , 6241	119, 14161	3960	10201	101	20	99	10, 1	11
31 , 961	151, 22801	10920	11881	109	60	91	10, 3	13
97 , 9409	127, 16129	3360	12769	113	112	15	8, 7	15

L'hypoténuse qui suit dans l'ordre après cent treize est cent-vingt un; à ce (nombre) la présente opération ne peut pas s'appliquer, parce qu'il n'est pas divisible en deux nombres dont on puisse extraire la racine. - Des parties du quinze il reste encore: les deux parties six et neuf, qui ont un diviseur commun , et dont il résulte l'espèce douze et cinq avec l'hypoténuse treize ;

les deux parties cinq et dix, qui ont pareillement un diviseur commun, et dont il résulte l'espèce quatre, trois et cinq; et les deux parties trois et douze qui ont un diviseur commun, et dont il résulte l'espèce quinze et huit, avec l'hypoténuse dix-sept.

73 , 5329	161 , 25921	10296	15625	125	44	117	11, 2	13

L'hypoténuse qui suit dans l'ordre après cent vingt cinq, est cent trente trois; la présente opération ne peut pas s'appliquer non plus à ce (nombre) pour la cause que nous avons mentionnée.

17 , 289	193 , 37249	18480	18769	137	88	105	11, 4	15
119 , 14161	167 , 27889	6864	21025	145	24	143	12, 1	13
127 , 16129	161 , 25921	4896	21025	145	144	17	9, 8	17

L'hypoténuse cent quarante cinq revient ici dans deux triangles souches différents, et tient lieu de ce qui manque.

89 , 7921	191 , 36481	14280	22201	149	140	51	10, 7	17
47 , 2209	217 , 47089	22440	24649	157	132	85	11, 6	17

L'hypoténuse qui suit après cent cinquante sept, est cent soixante un; la présente (opération) ne peut pas s'appliquer non plus à ce (nombre) pour la cause qui a été mentionnée.

1 , 1	239 , 57121	28560	28561	169	120	119	12, 5	17
113 , 12769	217 , 47089	17160	29929	173	52	165	13, 2	15
49 , 2401	257 , 66049	31824	34225	185	104	153	13, 4	17
119 , 14161	233 , 54289	20064	34225	185	176	57	11, 8	19

L'hypoténuse cent quatre-vingt cinq revient ici dans deux triangles souches différents, et tient lieu de ce qui manque.

73 , 5329	263 , 69169	31920	37249	193	168	95	12, 7	19
167 , 27889	223 , 49729	10920	38809	197	28	195	14, 1	15
103 , 10609	271 , 73441	31416	42025	205	84	187	14, 3	17
23 , 529	289 , 83521	41496	42025	205	156	133	13, 6	19

L'hypoténuse deux cent cinq revient ici dans deux triangles souches différents, et tient lieu de ce qui manque.

FIN DU TRAITÉ.

OBSERVATIONS.

Je ferai remarquer en premier lieu que les nombres du tableau qui précède, sont écrits, dans le ms. 952 bis suppl. arabe, en chiffres indiens, et non pas au moyen des lettres numérales, circonstance qui, par la date ancienne du manuscrit (voir observations 4.), acquiert un intérêt particulier pour la question de la propagation des chiffres indiens en Orient. J'ai déjà signalé ce fait historique dans une courte note insérée dans les *Annali di scienze matematiche e fisiche* publiés par M. *Tortolini* (Vol. VI, pag. 321 à 323), et le tableau dont on vient de tire la reproduction, est celui auquel j'ai fait allusion à l'endroit cité (pag. 323, lig. 12 et suiv.). Je profite de la présente occasion pour ajouter que l'on sait par l'Histoire des Dynasties d'Aboûl Pharadje (Édition de *Pococke*, Oxford, 1663, in 4°, pag. 215, lig. 6 à 22 de la traduction latine) et par les Biographies des médecins d'Ibn Abi

Oçaïbiah (Ms. 673, suppl. arabe de la Bibliothèque Impériale, fol. 130 v°, lig. 32 à fol. 131 r°, lig. 11) que le médecin Nazhîf mentionné dans la même note, véeut à la cour du sultan Bouide Adhâd Al-daoulah (mort en 372 de l'hégire, 983 de notre ère).

On voit que les nombres du tableau sont rangés suivant l'ordre de grandeur des hypoténuses qui se trouvent dans la 5.ᵉ colonne, en allant de droite à gauche. Cela est conforme à ce que l'auteur a dit précédemment à ce sujet; comparer ci-dessus pag. 9, lig. 24; pag. 10, lig. 20; pag. 14, lig. 23.

Quant aux observations intercalées par l'auteur dans ce tableau, elles rappellent pour les nombres de la forme $12m + 1$ ou $12m + 5$ non divisibles en deux carrés, les passages ci-dessus pag. 4, lig. 16 en remontant, et pag. 5, lig. 1; pour les nombres impairs divisibles en deux parties qui ont un facteur commun, le passage pag. 10, lig. 24 et suiv.; pour les hypoténuses qui se présentent plus d'une fois, et qui « tiennent lieu », comme dit l'auteur, « de ce qui manque », le passage pag. 7, lig. 9 et suiv.

Les nombres du tableau présentent dans le ms. arabe un certain nombre de fautes consistant en ce que le copiste a quelquefois omis un chiffre d'un nombre, et quelquefois à la place d'un chiffre en a mis un autre qui par sa forme ressemblait à celui qu'il fallait mettre. La loi de formation de ces nombres étant d'ailleurs connue, on reconnait sur le champ, et sans qu'il puisse rester le moindre doute à cet égard, que ce sont de simples fautes de copie; je crois donc inutile de les énumérer ici une à une.

Les nombres contenus dans les neuf colonnes du tableau en allant de droite à gauche, sont respectivement de la forme suivante :

1° $2n + 1 = a + b$.
2° a, b.
3° $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
4° $2ab$.
5° $a^2 + b^2$.
6° $(a^2 + b^2)^2$.
7° $2(2ab)[(a + b)(a - b)] = 4ab(a^2 - b^2)$.
8° $(a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 + 2ab)^2$, $a^2 - b^2 + 2ab$.
9° $(a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 - 2ab)^2$, $\pm(a^2 - b^2 - 2ab)$.

La septième colonne est celle qui contient les nombres congruents. En appelant nombres congruents primitifs les nombres congruents débarrassés de tous leurs facteurs quadratiques, on trouve que la table de l'auteur arabe contient les nombres congruents primitifs suivants :

5	34	221	546	3570
6	65	231	1155	4290
14	70	286	1254	5610
15	110	330	1785	7854
21	154	390	1995	10374
30	210	429	2730	

Cette table fournit donc en 33 lignes 29 nombres congruents primitifs, tandis que la table de Cossali (*Origine* etc. *dell'algebra*, Tome I, pag. 126) en 29 lignes n'en fournit que 12, qui sont tous contenus parmi ceux ci-dessus, à savoir :

5, 6, 14, 15, 21, 30, 70, 210, 231, 330, 390, 546.

La table de Fra Luca Pacioli (*Summa de Arithmetica* etc. Toscolano. 1523, fol. Dist. 2.ᵃ Tract. 6ᵗᵒ fol. 46 r°) contient 52 nombres congruents qui n'en fournissent que 14 de primitifs, à savoir:

5, 6, 14, 15, 21, 30, 65, 70, 154, 210, 231, 330, 390, 546.

L'auteur arabe a obtenu cet avantage en excluant les combinaisons où a et b auraient eu un diviseur commun. Cependant il a été loin de tirer des triangles rectangles en nombres entiers que contient sa table, tous les nombres congruents qu'ils auraient pu lui fournir. C'est ce que prouveront, je pense, les considérations suivantes.

En divisant par un même carré q^2 les deux équations fondamentales du problème

$$s^2 + k = u^2, \qquad s^2 - k = v^2$$

on obtient deux nouvelles équations de la même forme que les premières. Il suit de là qu'en supprimant dans un nombre congruent un facteur quadratique, on obtient de nouveau un nombre congruent. Les nombres congruents du tableau dressé par l'auteur arabe sont, comme on vient de le voir, de la forme $4ab(a^2-b^2)$; on peut donc supprimer le facteur 4. Les équations du problème deviennent en ce cas

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \pm ab(a^2-b^2) = \left(\frac{a^2 \pm 2ab - b^2}{2}\right)^2,$$

et le nombre congruent sera de la forme

$$\text{I)} \quad ab(a^2-b^2).$$

Or, les colonnes 3[e], 4[e] et 5[e] du tableau de l'auteur arabe nous fournissent des nombres qui satisfont à l'équation

$$x^2+y^2=z^2$$

où

$$x=(n+\alpha+t)^2-(n-\alpha)^2\,, \quad y=2(n+\alpha+t)(n-\alpha)\,, \quad z=(n+\alpha+t)^2+(n-\alpha)^2.$$

Donc, si dans I. on fait $a=z$, $b=x$, le facteur a^2-b^2 se transformera en un carré y^2; et en le supprimant on aura le nombre congruent:

$$1) \qquad zx=(n+\alpha+t)^4-(n-\alpha)^4.$$

Mais on peut aussi tranformer a^2-b^2 en un carré en faisant $a=z$, $b=y$, d'où $a^2-b^2=x^2$, ce qui donne comme nombre congruent

$$2) \qquad zy=2(n+\alpha+t)(n-\alpha)\left[(n+\alpha+t)^2+(n-\alpha)^2\right].$$

Les équations du problème qui correspondent à la forme 1. du nombre congruent, sont

$$\left(\frac{z^2+x^2}{2y}\right)^2 \pm zx = \left(\frac{y^2 \pm 2zx}{2y}\right)^2$$

ou, en remplaçant de nouveau x, y, z par leurs valeurs a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2,

$$\left(\frac{a^4+b^4}{2ab}\right)^2 \pm (a^4-b^4) = \left(\frac{a^4 \pm 2a^2b^2-b^4}{2ab}\right)^2,$$

et le nombre congruent sera de la forme

$$\text{II)} \quad (a^2+b^2)(a^2-b^2).$$

Dans cette expression faisons $a=x$, $b=y$; le facteur a^2+b^2 devient un carré, et l'on aura comme nombre congruent

$$3) \qquad \pm(x^2-y^2) = \pm\left[(n+\alpha+t)^4+(n-\alpha)^4-6(n+\alpha+t)^2(n-\alpha)^2\right].$$

Faisant $a=z$, $b=x$, on transforme en un carré le facteur a^2-b^2, et le nombre congruent sera

$$4) \qquad z^2+x^2=2(n+\alpha+t)^4+2(n-\alpha)^4.$$

Mais le facteur a^2-b^2 se transforme aussi en un carré par la substitution $a=z$, $b=y$, de sorte que l'on a le nombre congruent

$$5) \qquad z^2+y^2=(n+\alpha+t)^4+(n-\alpha)^4+6(n+\alpha+t)^2(n-\alpha)^2.$$

Considérons maintenant les équations du problème qui correspondent à la forme 2. du nombre congruent; ce sont

$$\left(\frac{z^2+y^2}{2x}\right)^2 \pm zy = \left(\frac{x^2 \pm 2zy}{2x}\right)^2$$

ou, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2,

$$\left[\frac{a^4+b^4+6a^2b^2}{2(a^2-b^2)}\right]^2 \pm 2ab(a^2+b^2) = \left[\frac{(a \pm b)^4-8a^2b^2}{2(a^2-b^2)}\right]^2$$

et le nombre congruent sera de la forme

$$\text{III)} \quad (a^2+b^2)2ab.$$

En faisant dans cette expression $a=x$, $b=y$ on transformera en un carré le facteur a^2+b^2; mais le nombre congruent qui résulte de cette substitution est $2xy$, c'est-à-dire la forme qui nous a servi de point de départ. On pourra ensuite transformer en un carré $4z^2$ le facteur $2(a^2+b^2)$, en faisant $a=x+y$, $b=x-y$; mais on retombe en ce cas sur le nombre congruent $\pm(x^2-y^2)$. De même, en faisant $a=\frac{z+x}{2}$, $b=\frac{z-x}{2}$, ce qui transformera le facteur ab dans le carré $\frac{1}{4}y^2$, on retrouve le nombre congruent z^2+x^2.

Enfin faisons $a = \frac{z+x}{2}$, $b = z - x$; le facteur $2ab$ se transforme en un carré y^2, et l'on obtient le nombre congruent

$$6) \qquad \left(\frac{z+x}{2}\right)^2 + (z-x)^2 = (n+\alpha+1)^4 + 4(n-\alpha)^4.$$

Si, comme on l'a fait ici, on suppose $n+\alpha+1 > n-\alpha$, il faut encore distinguer le cas de $a=z+x$, $b = \frac{z-x}{2}$, qui donne lieu au nombre congruent

$$7) \qquad (z+x)^2 + \left(\frac{z-x}{2}\right)^2 = 4(n+\alpha+1)^4 + (n-\alpha)^4.$$

A présent considérons les équations du problème qui correspondent à la forme 3.; ce sont

$$\left(\frac{x^4+y^4}{2xyz}\right)^2 \mp (x^2-y^2) = \left[\frac{(x^2 \pm y^2)^2 - 2y^4}{2xyz}\right]^2$$

ou, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en a, b

$$\left[\frac{(a^2-b^2)^4 + 16a^4b^4}{4ab(a^4-b^4)}\right]^2 \mp \left[(a^2-b^2)^2 - 4a^2b^2\right] = \left[\frac{(a^2+b^2)^4 - 8a^2b^2\left[(a^2+b^2)^2 \mp (a^2-b^2)^2\right]}{4ab(a^4-b^4)}\right]^2$$

et le nombre congruent sera de la forme

$$\text{IV}) \qquad \left[(a+b)^2 - 2b^2\right]\left[(a-b)^2 - 2b^2\right].$$

Le signe du nombre congruent étant indifférent, on obtiendra encore des nombres congruents, si on peut transformer l'un ou l'autre des facteurs de l'expression IV) en un carré négatif. Faisant $a = x + y - z$, $b = z$, on aura $(a+b)^2 - 2b^2 = -(x-y)^2$, et le nombre congruent sera

$$8) \qquad 2z^2 - (x+y-2z)^2 = 2\left[(n+\alpha+1)^2 + (n-\alpha)^2\right]^2 - \left[(\overline{n+\alpha+1} - \overline{n-\alpha})^2 + 2(n-\alpha)^2\right]^2.$$

Faisant $a = x + y + z$, $b = z$, on aura $(a-b)^2 - 2b^2 = -(x-y)^2$, et le nombre congruent sera

$$9) \qquad (x+y+2z)^2 - 2z^2 = \left[(\overline{n+\alpha+1} + \overline{n-\alpha})^2 + 2(n+\alpha+1)^2\right]^2 - 2\left[(n+\alpha+1)^2 + (n-\alpha)^2\right]^2.$$

Faisant pareillement $a = x - y \mp z$, $b = z$ on obtient les nombres congruents

$$10) \qquad (x-y-2z)^2 - 2z^2 = \left[(\overline{n+\alpha+1} + \overline{n-\alpha})^2 + 2(n-\alpha)^2\right]^2 - 2\left[(n+\alpha+1)^2 + (n-\alpha)^2\right]^2$$

$$11) \qquad (x-y+2z)^2 - 2z^2 = \left[(\overline{n+\alpha+1} - \overline{n-\alpha})^2 + 2(n+\alpha+1)^2\right]^2 - 2\left[(n+\alpha+1)^2 + (n-\alpha)^2\right]^2$$

La forme 3. de laquelle on vient de déduire les formes qui précèdent, montre aussi immédiatement que, toutes les fois que $x + y$ est un nombre carré, $x - y$ est un nombre congruent, et réciproquement. La table de l'auteur arabe, où les quantités $x + y$ et $x - y$ se trouvent dans la 8e. et la 9e. colonne, fournit de cette manière les nombres congruents

7 , 23 , 31 , 41 , 71 , 239 , 257.

Ces nombres résultent des quatre formes que l'on vient d'obtenir, si l'on prend les valeurs de x, y, z dans les triangles rectangles 1, 0, 1 ; 3, 4, 5; 5, 12, 13. Les mêmes nombres sont aussi compris dans la forme 8. seule ainsi qu'on le voit aisément en prenant

$$\begin{cases} n+\alpha+1 = 0, & 2, & 1, & 2, & 2, & 1, & 3 \\ \quad n-\alpha = 1, & 3, & 2, & 1, & -1, & -2, & 2 \end{cases}$$

et ils sont aussi compris dans la forme 9. seule, attendu que si on remplace $n+\alpha+1$ et $n-\alpha$ par $n-\alpha$ et $-(n+\alpha+1)$ ou par $-(n-\alpha)$ et $(n+\alpha+1)$, l'expression 8. se change dans l'expression 9., et l'expression 9. dans l'expression 8; enfin ces nombres sont pareillement compris dans chacune des formes 10. et 11.

On a vu ci-dessus (pag. 23) que les expressions $x + y$ et $x - y$ sont les racines u et v des deux carrés qui satisfont aux équations fondamentales du problème des nombres congruents

$$s^2 + k = u^2, \qquad s^2 - k = v^2.$$

Il suit maintenant de ce qui précède, que parmi les valeurs de u et de v sont compris les nombres congruents contenus dans les formes 8. 0. 10. et 11.

On reconnait aussi que les valeurs de la racine $u = x + y$ se retrouvent toutes parmi les valeurs de la racine $v = x - y$, car on a

$$u = (a + b)^2 - 2b^2\,, \qquad v' = (a' - b')^2 - 2b'^2$$

et faisant

$$a' = 5a - 2b\,, \qquad b' = 2a - b$$

on aura

$$v' = u\,.$$

Or, $5a - 2b$ et $2a - b$ sont premiers entre eux ; car, si $5a - 2b = p\delta$ et $2a - b = q\delta$, on aurait $a = (p - 2q)\delta$ et $b = (2p - 5q)\delta$. On voit, en outre, que la somme $(5a - 2b) + (2a - b) = 7a - 3b$ est toujours impaire, a et b ne pouvant être en même temps ni pairs, ni impairs, et que, par conséquent, il en est de même de $5a - 2b$ et $2a - b$. Donc toutes les combinaisons a', b' se trouvent parmi les a, b.

Pareillement parmi les valeurs de z, c'est à dire parmi les hypoténuses des triangles rectangles primitifs, sont compris tous les nombres congruents qui résultent des formes 6. et 7., si dans 6. on prend n et α en même temps pairs, ou en même temps impairs, et si dans 7. on en prend l'un pair et l'autre impair, en supposant du reste ; comme on en est convenu, $n + \alpha + 1$ et $n - \alpha$ premiers entre eux.

Parmi les valeurs de z sont compris aussi tous les nombres congruents de la forme 5., car x et y sont premiers entre eux, et $x + y$ est impair. Il en est de même des moitiés des nombres congruents de la forme 4., car $n + \alpha + 1$ et $n - \alpha$ sont supposés premiers entre eux et $(n + \alpha + 1)^2 + (n - \alpha)^2$ est impair.

En comparant la forme 3. à la forme primitive $2xy$ on voit que l'on peut tirer encore, si l'on veut, du tableau de l'auteur arabe le nombre congruent

$$\text{12)} \qquad = 4xy(x^2 - y^2)$$

et l'on a en même temps le théorème que, *étant donné un nombre congruent $2xy$, on peut toujours trouver un autre nombre congruent tel que le double produit des deux nombres soit de nouveau un nombre congruent*. On arrive à un résultat semblable en formant le double produit des formes 1. et 2.

Je n'étendrai pas ici davantage ces recherches que je reprendrai et développerai peut-être à une autre occasion. Mais j'ai calculé encore comme un exemple des douze formes de nombres congruents ci-dessus établies, et de la forme primitive $2xy$, les équations fondamentales du problème correspondantes à ces formes, en prenant les valeurs de x, y, z, dans le triangle rectangle 15, 8, 17. Voici ces exemples :

$$z^2 \pm 2xy = 17^2 \pm 240 = 23^2,\ 7^2.$$

$$\left(\frac{z^2 + x^2}{2y}\right)^2 \pm zx = \left(\frac{257}{8}\right)^2 \pm 255 = \left(\frac{287}{8}\right)^2, \left(\frac{223}{8}\right)^2.$$

$$\left(\frac{z^2 + y^2}{2x}\right)^2 \pm zy = \left(\frac{353}{30}\right)^2 \pm 136 = \left(\frac{497}{30}\right)^2, \left(\frac{47}{30}\right)^2.$$

$$\left(\frac{x^4 + y^4}{2xyz}\right)^2 \pm (x^2 - y^2) = \left(\frac{54721}{4080}\right)^2 \pm 161 = \left(\frac{75329}{4080}\right)^2, \left(\frac{17729}{4080}\right)^2.$$

$$\left(\frac{z^4 + x^4}{2xyz}\right)^2 \pm (z^2 + x^2) = \left(\frac{134146}{4080}\right)^2 \pm 514 = \left(\frac{162946}{4080}\right)^2, \left(\frac{97154}{4080}\right)^2.$$

$$\left(\frac{z^4 + y^4}{2xyz}\right)^2 \pm (z^2 + y^2) = \left(\frac{87617}{4080}\right)^2 \pm 353 = \left(\frac{116417}{4080}\right)^2, \left(\frac{42433}{4080}\right)^2.$$

$$\left[\frac{\left(\frac{z+x}{2}\right)^4+(z-x)^4+\frac{5}{2}y^4}{2\left\{\left(\frac{z+x}{2}\right)^2-(z-x)^2\right\}y}\right]^2 \pm \left\{\left(\frac{z+x}{2}\right)^2+(z-x)^2\right\}=\left(\frac{4481}{252}\right)^2 \pm 260=\left(\frac{6049}{252}\right)^2, \left(\frac{1889}{252}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(z+x)^4+\left(\frac{z-x}{2}\right)^4+\frac{5}{2}y^4}{2\left\{(z+x)^2-\left(\frac{z-x}{2}\right)^2\right\}y}\right]^2 \pm \left\{(z+x)^2+\left(\frac{z-x}{2}\right)^2\right\}=\left(\frac{1054721}{16368}\right)^2 \pm 1025 =$$

$$=\left(\frac{1177729}{16368}\right)^2, \left(\frac{915329}{16368}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x+y)^4(x+y-2z)^4+16(x+y-z)^4z^4}{4(x-y)z(x+y-z)\left\{(x+y-z)^4-z^4\right\}}\right]^2 \pm \left\{(x+y-2z)^2-2z^2\right\} =$$

$$=\left(\frac{5829043537}{234834600}\right)^2 \pm 457 = \left(\frac{7692857713}{234834600}\right)^2, \left(\frac{2962336463}{234834600}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x+y)^4(x+y+2z)^4+16(x+y+z)^4z^4}{4(x-y)z(x+y+z)\left\{(x+y+z)^4-z^4\right\}}\right]^2 \pm \left\{(x+y+2z)^2-2z^2\right\} =$$

$$=\left(\frac{6375022035841}{47152160160}\right)^2 \pm 2671 = \left(\frac{6824911007359}{47152160160}\right)^2, \left(\frac{5890874439041}{47152160160}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x-y)^4(x-y-2z)^4+16(x-y-z)^4z^4}{4(x+y)z(x-y-z)\left\{(x-y-z)^4-z^4\right\}}\right]^2 \pm \left\{(x-y-2z)^2-2z^2\right\} =$$

$$=\left(\frac{11639349841}{1149868440}\right)^2 \pm 151 = \left(\frac{20346065359}{1149868440}\right)^2, \left(\frac{3828674959}{1149868440}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x-y)^4(x-y+2z)^4+16(x-y+z)^4z^4}{4(x+y)z(x-y+z)\left\{(x-y+z)^4-z^4\right\}}\right]^2 \pm \left\{(x-y+2z)^2-2z^2\right\} =$$

$$=\left(\frac{450148864897}{9318499680}\right)^3 \pm 1103 = \left(\frac{546271346303}{9318499680}\right)^2, \left(\frac{326887774847}{9318499680}\right)^2.$$

$$z^4 \pm 4xy(x^2-y^2) = 289^2 \pm 77280 = 401^2, 79^2.$$

Enfin j'ai calculé pour tous les triangles rectangles contenus dans la table de l'auteur arabe les nombres congruents que fournissent les douze formes ci-dessus développées. J'ai inscrit dans le tableau ci-après tous ces nombres congruents, et j'y ai reproduit aussi ceux de la forme $2xy$. Auprès de ceux de ces nombres qui contiennent des facteurs quadratiques, j'ai placé les nombres congruents qui en résultent lorsqu'on supprime le plus grand facteur quadratique contenu dans chacun des premiers. J'ai marqué d'un astérisque ceux de ces nombres qui sont premiers, et du signe $2p$ ceux qui sont doubles de nombres premiers. Quant aux facteurs premiers des autres, il est évident qu'on n'en peut rien dire pour les nombres congruents qui contiennent les facteurs $x = (a+b)(a-b)$ ou $y=2ab$. Parmi les autres, les nombres congruents des formes 4. 5. 6. 7. étant des sommes de deux carrés, ont tous leurs facteurs premiers des formes $8m+1$, $8m+5$; cependant cette dernière forme des facteurs premiers doit être exclue pour les nombres congruents 4. et 5., attendu que le premier peut s'écrire aussi y^2+2x^2, et le second x^2+2y^2. Les facteurs premiers des nombres congruents des formes 3. 8. 9. 10. 11. sont des formes $8m+1$, $8m+7$, parceque la forme 3. peut s'écrire $\pm(z^2-2y^2)$, de sorte que tant le nombre congruent de la forme 3. que ceux des formes 8. 9. 10. et 11. appartiennent à la forme quadratique g^2-2h^2 ou à la forme $2g^2-h^2$ qui est équivalente à g^2-2h^2.

Voici le tableau dont il s'agit.

x	y	z	$2xy$	zx	zy	$\pm(x^2-y^2)$	z^2+x^2	z^2+y^2
3	4	5	24, 6 2p	15	20, 5*	7*	34 2p	41 *
5	12	13	120,30	65	156,30	119	194 2p	313 *
15	8	17	240,15	255	136,34 2p	161	514 2p	353 *
7	24	25	330,21	175,7*	600, 6 2p	527	074 2p	1201 *
21	20	29	840,210	600	580,145	41 *	1282 2p	1241
35	12	37	840,210	1295	444,111	1081	2594 2p	1513
0	40	41	720, 5*	360,41*	1640,410	1519,31*	1702 2p	3281
45	28	53	2520,70	2385,265	1484,371	1241	4834 2p	3503 *
11	60	61	1320,330	671	3660,015	3479,71*	3842	7321 *
03	10	05	2010, 142p	4095,455	1040,05	3713	8194	4481 *
33	56	65	3696,231	2145	3640,910	2047	5314 2p	7361
55	48	73	5280,330	4015	3504,210	721	8354 2p	7633
77	36	85	5544,154	6545	3060,85	4033	13154 2p	8521 *
13	84	85	2184,546	1105	7140,1785	6887	7304 2p	14281 *
30	80	89	6240,390	3471	7120,445	4870	0442 2p	14321 *
65	72	07	0360, 65	6305	6984,1942p	050	13634	14593 *
99	20	101	3960,110	9900,1111	2020,505	0401	20002	10001 *
91	60	109	10920,2730	9910	6540,1685	4681	20162	15481
15	112	113	3360,210	1695	12656,701	12310	12004	25313
117	44	125	10296,286	14625,65	5500,55	11753	29314 2p	17561
105	68	137	18480,1155	14385	12056,3014	3281	20704 2p	26513 *
143	24	145	6864,420	20735	3480,870	19873	41474	21601 *
17	144	145	4890,34 2p	2465	20880,145	20447	21314 2p	41761 *
51	140	149	14280,3570	7509	20860,5215	16900	24802 2p	41801 *
85	132	157	22440,5610	13345	20724,5181	10190	31874 2p	42073 *
110	120	169	28560,1785	20111,119	20280,30	230 *	42722	42961 *
165	52	173	17160,4290	28545	8996,2249	24521	57154,34 2p	32633 *
153	104	185	31824,221	28305,3145	19240,4810	12503,257*	57634 2p	45041
57	176	185	20064,1254	10545	32560,2035	27727	37474	65201
05	168	103	31920,1995	18335	32424,8100	10100	40274	65473
105	28	197	10920,2730	38415	5516,1379	37241	76834	30593,137*
107	84	205	31416,7854	38335	17220,4305	27013	76004	49081 *
133	156	205	41406,10374	27265	31980,7095	6647,23*	59714	66301 *

x	y	z	$\left(\frac{z+x}{2}\right)^2+(z-x)^2$	$(z+x)^2+\left(\frac{z-x}{2}\right)^2$	$2z^2-(x+y-2z)^2$	$(x+y+2z)^2-2z^2$	$\pm\{(x-y-2z)^2-2z^2\}$	$\pm\{(x-y+2z)^2-2z^2\}$	$\pm 4xy(x^2-y^2)$	
3	4	5	20, 5*	65	41*	239*	71*	31*	336,	21
5	12	13	145	340, 85	257*	1511*	751*	23*	28560,	1785
15	8	17	260, 65	1025, 41*	457*	2671*	151*	1103*	77280,	4830
7	24	25	580, 145	1105	860	5311	3239	161	354144,	22134
21	20	20	689	2516, 629	1393	8119	1507*	1799	68880,	4305
35	12	37	1300, 13*	5185	2009, 41*	11903*	137*	6671	1816080,	113505
9	40	41	1649	2756, 689	2273*	13799*	9407	761*	2187360,	310
45	28	53	2465	9620, 2405	4529	26423*	2303, 47*	9511*	6254640,	43435
11	60	61	3796, 949	5809	4641	29807	21799*	2113*	9184560,	11715
63	16	65	4100, 41*	16385	5849*	35231, 719*	1561	22879	14970816,	25091
33	56	65	3425, 137*	9860, 2465	6769	39511*	14959	2999*	15131424,	945714
55	48	73	4420, 1105	16465	8800	51343*	8063*	12751	7613760,	118965
77	36	85	6625, 265	26260, 6565	11201	65639	2101	30071*	51370704,	356741
13	84	85	7585	10900, 109*	9121	56839	43631	4649*	30082416,	1880151
39	80	89	6506, 1649	17009	12361	72367*	32110*	2927*	60869920,	951405
65	72	97	7585	26500, 265	15560*	90743	21583	16151	17952480,	124670
99	20	101	10004, 2501	40001	13513*	82639	5273*	58559	74455920,	517055
91	60	109	10324, 2581	40081	19273*	112309	11207	38230*	102233040,	6389565
15	112	113	13700, 137*	18785, 65	15737*	99071	78791*	8897	82783680,	1293495
117	44	125	14705	58580, 14645	23320	137671	79*	73079*	242017776,	1680670
105	88	137	15665	58820, 14705	30977*	180551	28511	47143*	121265760,	7579110
143	24	145	20740, 5185	82945	26921*	166799*	12809*	125231*	272816544,	17051034
17	144	145	22045	30340, 7585	25400*	161351	131830*	15481	200217024,	347599
51	140	140	10604, 29*	42401	32953	194719	105367*	721	485491440,	30343215
85	132	157	10825, 793	59860, 14965	39889	232663*	81023*	21901*	457731120,	28608195
119	120	169	23236, 5800	83569	47321	275807, 287	57799	56447	13651680,	853230
165	52	173	28625, 1145	114260, 28565	43217	257111	5560*	150823	841500720,	52597545
153	104	185	29585	114500, 1145	55681*	324679	34591*	107111	801519264,	113594
57	176	185	31025, 1241	62660, 15065	49681*	205159	170671	5449*	1112629056,	17384820
95	168	103	30340, 7585	85345, 505	59369*	340703	136183	23471, 479*	1225664160,	76604010
195	28	197	38420, 9605	153665	46377	303071	26089	237103	813343440,	50833965
187	84	205	38740, 9685	153745	64729, 1321*	379711	10199	179119*	1753829616,	109614351
133	156	205	33745	115540, 28885	69409	404551	103439, 2111*	65719*	551647824,	110301

5

ADDITION AUX OBSERVATIONS 8 *et* 9.

Les règles de Pythagore et de Platon pour trouver des triangles rectangles en nombres entiers étant en quelque sorte les premiers pas qu'on ait faits dans la théorie des nombres, il n'est peut-être pas entièrement sans intérêt, de dire ici un mot de la manière d'arriver à ces règles qui paraît être la plus naturelle, et par conséquent celle qui a conduit les deux célèbres philosophes à cette découverte.

Étant proposée l'équation

$$1) \qquad x^2 + y^2 = z^2 ,$$

on en tire immédiatement

$$x^2 . 1 = (z + y)(z - y) ,$$

et égalant les facteurs séparément

$$z + y = x^2 , \qquad z - y = 1 ,$$

on a

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} , \qquad z = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} + 1 ;$$

afin de rendre ces valeurs de y et z entières, on prendra naturellement pour x un nombre impair $2m + 1$, de sorte que l'on aura

$$x = 2m + 1 , \qquad y = \frac{(2m + 1)^2 - 1}{2} , \qquad z = \frac{(2m + 1)^2 - 1}{2} + 1$$

et ce sont précisément les expressions énoncées par Proclus pour la règle de Pythagore.

Quant à la règle de Platon, on tire de 1), en introduisant l'indéterminée m ,

$$mx . \frac{x}{m} = (z + y)(z - y) ,$$

et posant

$$z + y = mx , \qquad z - y = \frac{x}{m} ,$$

on a

$$y = \frac{m^2 - 1}{2m} x , \qquad z = \frac{m^2 + 1}{2m} x ;$$

afin de se débarrasser des fractions on prendra naturellement pour x un nombre pair $2m$, et l'on aura

$$x = 2m , \qquad y = m^2 - 1 , \qquad z = m^2 + 1$$

et ce sont exactement les expressions énoncées par Proclus pour la règle de Platon.

Voici encore une autre manière très-simple et très-naturelle, mais moins élégante d'arriver aux expressions de Platon.

Égalant dans 1) le nombre z à y plus une indéterminée i, on a

$$x^2 = (2y + i)i ,$$

et pour que le second membre devienne un carré, il faudra que $2y + i$ soit égal à i fois un carré, donc

$$2y + i = i . m^2 \qquad \text{ou} \qquad 2y = i(m^2 - 1) ;$$

la solution qui se présente tout naturellement, est de prendre $i = 2$, ce qui donne

$$y = m^2 - 1 , \qquad x = 2m , \qquad z = m^2 + 1 .$$

B.

LETTRE DU CHAÏKH ABOÛ DJA'FAR MOHAMMED BEN ALHOÇAÏN À ABOÛ MOHAMMED ABDALLAH BEN ALÎ LE CALCULATEUR, SUR LA FORMATION DES TRIANGLES RECTANGLES À CÔTÉS RATIONNELS ET SUR L'UTILITÉ QU'OFFRE LEUR CONNAISSANCE. fol. 86 *verso.*

J'ai déjà expliqué que (les arguments) qu'avait proposés Aboû Mohammed Alkhodjandî, que Dieu soit miséricordieux envers lui, dans sa démonstration (du théorème) que de l'addition de deux nombres cubes il ne résulte pas un nombre cube, sont défectueux et inexacts, et que la règle qu'il a donnée pour la connaissance des triangles rectangles à côtés rationnels, est particulière et non générale. Vous avez lu, ô mon frère que Dieu assiste, (la correspondance) qui a été échangée entre moi et lui sur cette matière. Cependant je n'ai pas expliqué comment on forme ces triangles, par quelle méthode on les connait et les produit, et quelle est l'utilité que l'on tire de leur connaissance, utilité qui est le but et l'objet de (la théorie de) ces (triangles). Or, il se peut que vous éprouviez le besoin de prendre connaissance de cela; je l'ai donc exposé pour vous, et je vous l'ai envoyé, afin, que vous le lisiez, si telle est la volonté de Dieu.

OBSERVATIONS.

Les lignes que l'on vient de lire, renferment une donnée historique asses importante. Elles nous apprennent qu'à une époque fort ancienne les géomètres arabes connaissaient déjà le célèbre théorème que la somme de deux cubes ne peut pas être un cube, et étaient occupés à en chercher la démonstration. Aboû Mohammed Alkhodjandî est cité par Edward Bernard (*Philosophical Transactions*, Vol. XIII, année 1683, pag. 724, lig. 1 à 5) pour une observation de l'obliquité de l'écliptique qu'il aurait faite en 382 de l'hégire, 992 de notre ère, du temps du prince bouide Fakhr Al-daoulah, qui régna effectivement de 373 à 387 de l'hégire, 983 à 997 de notre ère. Cependant il se présente ici une difficulté chronologique. Le nom d'Alkhodjandî est accompagné ci-dessus des mots « que Dieu soit miséricordieux envers lui », qui indiquent qu'Alkhodjandî était mort à l'époque où le présent traité fut composé, ou du moins où il fut copié; la copie fut collationnée avec le manuscrit autographe de l'auteur, ainsi que l'atteste un postscriptum qu'on lira plus loin à la fin du traité. Or, quoique ce postscriptum ne renferme pas de date de copie, je serais très-disposé à croire, que le traité d'Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn fut copié comme la plupart des autres morceaux contenus dans le ms. où il se trouve, pendant l'espace de temps compris entre les années 969 et 972 de notre ère (comparer ci-dessus, observations 4, pag. 8, lig. 27). Mais Alkhodjandî ne pouvait pas être mort en 972 et observer en 992. Il est vrai qu'Edward Bernard appelle l'astronome dont il parle, Aboû Mahmoûd, tandis que le ms. traduit ici porte Aboû Mohammed; mais cette différence ne dépend dans l'écriture arabe que de l'omission d'une seule lettre, et ne paraît pas suffisante pour nous décider à admettre l'existence de deux personnages distincts, originaires de la ville de Khodjandah en Transoxiane, à peu près contemporains, l'un géomètre et appelé Aboû Mohammed, l'autre astronome et appelé Aboû Mahmoûd. Quoi qu'il en soit, il paraît presque certain que la démonstration de l'impossibilité de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$ dont il est question dans notre texte, fut donnée antérieurement à la fin du X.e siècle de notre ère, et il est probable que cette impossibilité fut connue des géomètres arabes, comme thèse, plus ou moins longtemps avant cette époque.

Quant aux objections faites par notre auteur contre la démonstration d'Alkhodjandî, il faudrait peut-être, avant de les admettre sans restriction, connaître le raisonnement même de ce dernier géomètre. Car l'auteur du présent traité critique en même temps une règle d'Alkhodjandî pour trouver les triangles rectangles en nombres rationnels, quoique les considérations qu'il propose lui-même sur cette matière, ne soient nullement à l'abri de toute critique, comme nous le verrons par la suite. Il serait

donc possible qu'il n'eût pas bien compris le sens ou la portée des arguments proposés par Alkhodjandi relativement à l'impossibilité de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$, et que ce fût là la cause du blâme qu'il émet. Il est toutefois assez probable qu'Alkhodjandi n'ait pas réussi à surmonter toutes les difficultés que la démonstration de cette impossibilité présente en effet, d'autant plus que Euler lui-même a été obligé de revenir sur la démonstration qu'il en avait donnée en premier lieu, et de la compléter par d'importantes considérations subsidiaires (voir *Novi comment. acad. scient. imp. Petrop.* Tom. VIII, 1760 et 1761, pag. 105).

On aura remarqué que l'auteur insiste tout particulièrement sur l'utilité et le but de la formation des triangles rectangles à côtés rationnels. Ce but n'est autre que la résolution du problème des nombres congruents, ainsi que l'auteur le déclarera ci-après d'une manière tout à fait explicite. (Comparer ci-dessus, observations 18, pagg. 22 et 23).

Voici (les théorèmes préliminaires) qu'il faut placer en tête (de cette théorie).

Si un nombre quelconque peut être divisé en deux parties telles que l'excédant de son carré sur le carré de l'une de ses deux parties soit un carré, le carré de ce (nombre) peut être divisé en deux carrés.

A C B D

E

Supposons que AB soit (ce) nombre quelconque, partageons-le au point C en deux parties, posons le nombre E (égal à) l'excédant du carré du nombre AB sur le carré de l'une de ses deux parties, laquelle soit CB, et prolongeons AB jusqu'à ce que BD soit égal à CB; alors le produit de AD par AC, qui est E, avec le carré de CB est égal au carré de AB, en vertu de ce qui est démontré dans la sixième proposition du deuxième Livre du Traité des Éléments. Conséquemment, si E est un carré, [le carré de] AB est partagé en deux carrés.

OBSERVATION.

Cette démonstration est inutile, la proposition étant évidente d'elle-même; car elle dit seulement que, si $a^2 - b^2 = c^2$, on a aussi $a^2 = b^2 + c^2$. La citation est exacte.

Toutes les fois qu'un nombre impair est divisible en deux nombres carrés, c'est à dire en deux parties dont on puisse extraire la racine, son carré est divisible en deux nombres carrés.

E A DCB

Supposons que AB soit un nombre impair qui est divisé, au point C, en deux nombres carrés, et coupons CD égal à CB. Je dis que l'excédant du carré de AB sur le carré de AD est un nombre carré.

Démonstration. Si nous prolongeons AB jusqu'à ce que AE soit égal à AD, AD sera à DC comme ED à DB, et *componendo* AC à DC comme EB à DB. Or, AC est à DC comme un nombre carré à un nombre carré, donc EB à DB comme un nombre carré à un nombre carré. Conséquemment (EB et DB) sont deux (nombres) plans semblables en vertu de ce qui est démontré dans la vingt quatrième proposition du huitième Livre du Traité des Elements. Le produit de l'un d'eux par l'autre est donc un nombre carré. Mais le produit de EB par DB est l'excédant du carré de AB sur le carré de AD. Par conséquent l'excédant du carré de AB sur le carré de AD est un nombre carré.

Le carré de AB est donc divisé, au point D, en deux nombres carrés. A cause de cela, si l'on considère AB comme l'hypoténuse (sous-tendant) l'angle droit d'un triangle, AD qui est la différence entre les deux nombres carrés, sera l'un des deux côtés (de l'angle droit). Je veux dire (que AD est) ce qui reste de AC, à savoir du plus grand des deux carrés (dont se compose AB), si l'on en retranche CB, qui est le plus petit carré.

Et si on multiplie AD | par lui-même, qu'on retranche (ce produit) du pro- fol. 87 *recto*
duit de l'hypoténuse par elle-même, et que l'on prenne la racine de ce qui reste, ou si l'on multiplie le double de AD avec DC par DB, et que l'on prenne la racine du produit, il résultera de chacune des deux opérations le second côté (de l'angle droit du triangle rectangle).

OBSERVATIONS.

Voici le raisonnement de l'auteur. Il fait

$$AB = \alpha^2 + \beta^2, \quad AC = \alpha^2, \quad BC = CD = \beta^2,$$

$$AD = AE = \alpha^2 - \beta^2, \quad EB = (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2), \quad DB = (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2),$$

et il a

$$\{(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2)\} : \{(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2)\} = \alpha^2 : \beta^2$$

$$\{(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2)\} \cdot \{(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2)\} = \frac{\alpha^2}{\beta^4} [(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2)]^2$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 4\alpha^2 \beta^2.$$

On voit que $\alpha^2 + \beta^2$ ou AB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des deux autres côtés est $\alpha^2 - \beta^2$ ou AD, tandis que le troisième côté est

$$2\alpha\beta = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} \quad \text{ou} \quad = \sqrt{2AC \cdot BD}.$$

Voici l'énoncé de la 24.e proposition du VIII.e Livre des Éléments d'Euclide citée par l'auteur : « Si le rapport de deux nombres est celni d'nn nombre carré à un nombre carré, et que le premier nombre soit un carré, le second sera pareillement un carré. » Ponr démontrer ce théorème, Enclide prouve d'abord que, si le rapport de deux nombres est celui d'un nombre carré à un nombre carré, il ne se tronve entre ces deux nombres qu'nn seul nombre moyen proportionnel; d'où il suit, par la 20e. proposition du VIIIe. Livre, que les denx nombres sont deux nombres plans semblables. Le théorème dont l'auteur se sert ensuite, savoir que le prodnit de deux nombres plans semblables est nn dans. carré, est démontré la 1.re proposition du IX.e Livre des Éléments

Le triangle construit (de cette manière) a donc l'hypoténuse et les deux côtés (qui renferment l'angle droit) rationnels. Le carré du nombre impair, à savoir de AB, est impair. Ce carré vient d'être divisé en deux nombres carrés. Or, l'impair se divise seulement dans l'impair et le pair. Donc l'un des deux carrés sera impair et l'autre pair. Et le côté du carré impair est impair, et le côté du carré pair est pair. Conséquemment l'un des deux côtés (qui renferment l'angle droit) du triangle sera toujours impair et l'autre pair. Celui des deux qui est impair sera AD, parce que AB est impair, et qu'on en a retranché DB qui est pair, de sorte que le reste est impair. Nous avons aussi reconnu (que l'on obtient) le second côté (de l'angle droit) qui est le (côté) pair, en multipliant AC par CB, en trouvant la racine du produit, et en la dou-

blant, parce que le produit de AC par CB est le quart du produit de EB par DB. La plus facile et la plus courte de ces méthodes est de trouver la racine de AC et la racine de CB, d'en multiplier l'une par l'autre, et de doubler ce qui en résulte, ou de multiplier l'une par l'autre (prise) deux fois, parce que le produit de la racine d'un nombre carré quelconque par la racine d'un autre carré, est un nombre qui est moyen proportionnel entre les deux carrés, en vertu de ce qui est démontré dans la onzième proposition du huitième Livre du Traité des Éléments.

OBSERVATION.

Si l'hypoténuse $\alpha^2 + \beta^2$ est impaire, le second côté $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta^2$ est pareillement impair; le troisième côté, qui est pair, s'exprime par $\sqrt{EB \cdot DB} = 2\alpha\beta$, ainsi qu'il résulte des observations précédentes. La citation est exacte.

Nous démontrerons (maintenant) de combien l'hypoténuse dépasse chacun des deux (autres) côtés.

A D C B
. . . .
E T Z H
. . . . . .

Traçons de nouveau AB, et posons EZ (égal à) la racine de AC, et ZH (égal à) la racine de CB. Coupons ZT égal à ZH. Le carré de EZ est donc AC, le carré de ZH est CB, ZH est égal à ZT, et DC égal à CB. Par conséquent l'excédant du carré de EZ sur le carré de ZT est AD. Mais l'excédant du carré de EZ sur le carré de ZT est égal au produit de EH par ET. Il résulte (de là) une autre manière de trouver AD; elle (consiste en ce) que nous multiplions la somme des deux racines par leur différence, qui est ET. Or, comme le produit de EH par ET plus les deux carrés égaux de ZT et de ZH est égal à la somme des deux carrés de EZ et de ZH, laquelle est AB, AD sera plus petit que AB du double du carré de la plus petite des deux racines.

Quant à l'autre côté, il est plus petit que AB du carré de ET qui est la différence des deux racines. Car ce (côté) est égal au produit de l'une des deux racines par l'autre (prise) deux fois, le produit de EZ par ZH (pris) deux fois avec le carré de ET est égal à la somme des deux carrés de EZ et de ZH, en vertu de ce qui est démontré dans la septième proposition du second Livre du Traité des Éléments, et les deux carrés de EZ et de ZH sont égaux à AB. Conséquemment si l'on prend la différence des deux racines de AC et de CB, qu'on la multiplie par elle-même, et qu'on retranche (le produit) de l'hypoténuse, ce qui reste est cet (autre) côté.

OBSERVATION.

L'auteur fait voir que les différences de l'hypoténuse et de l'une ou de l'autre des cathètes sont :

1) $\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha^2 - \beta^2) = 2\beta^2$, 2) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$.

C'est ce qui est énoncé aussi dans le N.° 14 du fragment anonyme. (Voir ci-dessus pag. 17). L'auteur fait observer en passant que la cathète $\alpha^2 - \beta^2$ s'exprime aussi par $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$. La citation est exacte.

Je n'ai pas fait ressortir que l'on peut trouver un nombre pair qui se divise en deux parties dont on peut extraire la racine, c'est à dire en deux nombres carrés. Mais ce (nombre pair) sera double ou multiple d'un impair qui le précède, et qui se divise en deux parties dont on peut extraire la racine. Le triangle que l'on construit au moyen du (nombre pair) sera donc de l'espèce du triangle que l'on construit au moyen d'un impair qui le précède, de sorte que ce qui est construit au moyen du pair viendra à la suite | de ce qui est construit au moyen fol. 87 *verso.* de l'impair, et sera produit par la production de ce dernier sans difficulté; attendu que tout nombre pair, s'il est divisé en deux parties dont on peut extraire la racine, est divisé seulement en deux impairs dont l'un est l'unité exclusivement, et l'autre un nombre dont on peut extraire la racine. Tel est le dix qui se divise en un et neuf, et qui est le double du cinq qui le précède, et qui se divise en un et quatre. Or, les deux (autres) côtés du triangle pour l'hypoténuse duquel on a pris dix, sont six et huit dont chacun est le double du (côté) correspondant (du triangle) pour l'hypoténuse duquel on a pris cinq, et dont les deux (autres) côtés sont trois et quatre. Une propriété caractéristique de tout triangle rectangle primitif à côtés rationnels est donc que son hypoténuse soit impaire, un de ses deux (autres) côtés impair et l'autre pair. Pour ce qui suit ces (triangles primitifs) et qui en est dérivé, l'hypoténuse et les côtés (peuvent) tous (être) pairs.

OBSERVATIONS.

L'auteur énonce ici le théorème que *les triangles rectangles qui ont pour hypoténuse un nombre pair, ne sont pas primitifs.* En effet soit

$$x^2 + y^2 = z^2$$

et supposons que z soit pair. Il faudra que x et y soient à la fois impairs ou pairs. Si x et y étaient en même temps impairs, la somme de leurs carrés serait de la forme $2(2m + 1)$ qui ne peut pas être égale à un carré. Conséquemment, si z est pair, x et y le sont nécessairement aussi, les trois côtés ont 2 pour commun diviseur, donc le triangle n'est pas primitif. C'est ce qu'on voit mieux encore par la considération suivante. Il suit du théorème énoncé par Gauss dans la note au bas de la page 218 des *Disquisitiones arithmeticae*, que le nombre des décompositions en deux carrés d'un nombre $2^{\mu}.N$ est indépendant de l'exposant μ, donc que $2^{\mu}.N$ n'est décomposable en deux carrés qu'autant que l'est N. Soit donc $N = a^2 + b^2$. On peut évidemment faire abstraction des puissances paires de 2 contenues dans 2^{μ}, de sorte qu'il suffit de considérer le nombre $2(a^2 + b^2)$ pour comprendre tous les cas où un nombre pair est décomposable en deux carrés. Or on a

$$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2,$$

et formant un triangle rectangle avec les nombres $a + b$ et $a - b$, on obtient

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 2(2ab)$$
$$2(a + b)(a - b) = 2(a^2 - b^2)$$

c'est à dire un triangle dont les côtés sont doubles de ceux du triangle rectangle formé avec les nombres a et b. Dans le cas que l'auteur a choisi pour exemple, on a $a = 2$, $b = 1$.

Quant aux mots depuis « attendu que tout nombre pair » jusqu'à « et l'autre un nombre dont on peut extraire la racine », ils renferment une assertion complètement fausse. Car les nombres pairs

34, 58, 90, 74, 106, 130 et une infinité d'autres sont respectivement égaux aux sommes de deux carrés 3^2+5^2, 3^2+7^2, 3^2+9^2, 5^2+7^2, 5^2+9^2, 7^2+9^2, etc., et cependant $34-1$, $58-1$, $90-1$, $74-1$, $106-1$, $130-1$ ne sont pas des nombres carrés.

Nous avons trouvé la méthode ponr connaitre les hypoténuses des triangles rectangles à côtés rationnels; (elle consiste en ce) que nous examinons un à un les impairs se suivant à partir de l'unité d'après l'ordre naturel, et que nous en employons (ceux) qui se divisent en deux carrés. Nous avons fait cela, et nous avons consigné (les nombres) qu'on emploie, dans une table dont l'ordre et l'arrangement exigent (cependant) que nons (y) consignions aussi, en même temps que les (impairs), les pairs qui se divisent en deux carrés. Quant à la formation de la table, elle est divisée en douze lignes suivant la largeur, et en dix lignes suivant la longueur.

Quant à sa construction, on écrit dans la première ligne suivant la longueur les nombres consécutifs depuis l'unité jusqu'au dix. On en multiplie chacun par lui-même, et on écrit le produit en regard dans la seconde ligne. On double ensuite chacun (des nombres) qui (se trouvent) dans la seconde ligne, et on écrit les résultats suivant l'ordre dans la troisième ligne. Ensuite on pose ce qui est écrit dans la première des lignes de la largeur en commençant à partir de la troisième ligne suivant la longueur. Or (les nombres de cette première ligne horizontale) se dépassent l'un l'autre des nombres impairs suivant l'ordre à partir du trois. (Les nombres) qui sont écrits dans la seconde ligne (horizontale) se dépassent l'un l'autre des nombres impairs suivant l'ordre à partir du cinq; ceux qui sont écrits dans la troisième ligne se dépassent l'un l'autre des impairs suivant l'ordre à partir du sept. Ensuite cela continue de cette manière, de sorte que les (quantités) dont se dépassent l'un l'autre (les nombres) qui (se trouvent) dans la dixième ligne, qui est la dernière des lignes de la largeur, sont les impairs à partir de vingt et un.

Quant aux (quantités) dont ces nombres se dépassent l'un l'autre relativement aux lignes de la longueur, (les nombres) qui (se trouvent) dans la seconde ligne se dépassent l'un l'autre des impairs suivant l'ordre à partir du trois; et (ceux) qui (se trouvent) dans les autres lignes se dépassent l'un l'autre de nombres pairs. L'excédant (de l'un sur l'autre des nombres) qui (se trouvent) au commencement de la troisième ligne est six, puis (l'excédant suivant est) dix, puis quatorze; et ainsi de suite en augmentant de quatre en quatre jusqu'à la fin de la ligne. L'excédant (de l'un sur l'autre des nombres) qui (se trouvent) au commencement de la quatrième ligne est huit; puis (l'excédant suivant est) douze, puis seize, et ainsi de suite en augmentant de quatre en quatre. L'excédant (de l'un sur l'autre des nombres) qui (se trouvent) au commencement de la cinquième ligne est dix; puis (l'excédant suivant est) quatorze, puis dix-huit, et ainsi de suite en augmentant de quatre en quatre. L'excédant (de l'un sur l'autre des nombres) qui (se trouvent) au commencement de la sixième ligne est douze; puis (l'excédant suivant est) seize, puis vingt, et ainsi de suite en augmentant de

quatre en quatre jusqu'à la fin de la ligne. Les excédants continuent de cette manière dans les autres | lignes de la longueur. fol. 88 recto.

En vertu de cette combinaison sont produits dans les lignes de la longueur dont le nombre est pair à partir de la première ligne, des nombres pairs, et dans les lignes dont le nombre à partir de la première ligne est impair, des nombres impairs. Si d'un quelconque de ces nombres on retranche ce qui se trouve en regard de lui dans la première ligne, ce qui est un carré, il reste un résidu qui est un carré. Chacun des nombres qui se trouvent dans la table, est donc divisé en deux carrés. Celui qui veut continuer les lignes (de la table), pourra le faire, en vertu de ce que nous avons montré, jusqu'au terme qu'il voudra. Ces nombres s'étendent donc à l'infini.

Voici cette table :

Les nombres qui se divisent en deux nombres carrés.										Les carrés.	Les racines
101	82	65	50	37	26	17	10	5	2	1	1
125	104	85	68	53	40	29	20	13	8	4	2
153	130	109	90	73	58	45	34	25	18	9	3
185	160	137	116	97	80	65	52	41	32	16	4
221	194	169	146	125	106	89	74	61	50	25	5
261	232	205	180	157	136	117	100	85	72	36	0
305	274	245	218	193	170	149	130	113	98	49	7
353	320	289	260	233	208	185	164	145	128	64	8
405	370	337	306	277	250	225	202	181	162	81	9
461	424	389	356	325	296	269	244	221	200	100	10

OBSERVATIONS.

Pour trouver tous les nombres décomposables en deux carrés, l'auteur a recours à un moyen qui, en vérité, est infaillible; c'est d'ajouter le carré de chaque nombre entier successivement à lui-même et aux carrés de tous les nombres entiers suivants, et de dresser une table des résultats. Il a reconnu que cette table se construit facilement au moyen des différences, soit de celles des colonnes horizontales, soit de celles des colonnes verticales. En effet, faisons abstraction, parmi les colonnes verticales, de celle qui contient les doubles des carrés, et appelons la *première* celle dont le premier nombre est 5, la *seconde* celle dont le premier nombre est 10, et ainsi de suite, de sorte que la dernière colonne verticale du tableau, dont le premier nombre est 101, sera la *neuvième*. Cela posé, le $p^{\text{ième}}$ nombre de la $q^{\text{ième}}$ colonne verticale s'exprime par

$$p^2 + (p + q)^2.$$

La différence de deux nombres contigus d'une même colonne verticale sera

$$(p + 1)^2 + (p + q + 1)^2 - p^2 - (p + q)^2 = 4p + 2q + 2,$$

et la différence suivante

$$(p + 2)^2 + (p + q + 2)^2 - (p + 1)^2 - (p + q + 1)^2 = 4p + 2q + 6,$$

de sorte que les différences deuxièmes sont constantes et égales à 4.

La différence de deux nombres contigus d'une même colonne horizontale est

$$p^2 + (p + q + 1)^2 - p^2 - (p + q)^2 = 2p + 2q + 1 ,$$

et la différence suivante

$$p^2 + (p + q + 2)^2 - p^2 - (p + q + 1)^2 = 2p + 2q + 3 ,$$

donc les deuxièmes différences sont pareillement constantes et égales à 2.

L'idée de l'auteur de se servir du tableau, construit comme on vient de le voir, pour trouver les nombres décomposables en deux carrés, offre certains avantages, notamment celui que le tableau contient tous ces nombres et n'en contient pas d'autres; en outre, si un nombre est décomposable en deux carrés de plusieurs manières, chacune de ces décompositions est donnée séparément par le tableau; enfin le tableau fait connaître immédiatement les deux carrés qui correspondent à une décomposition, l'un de ces carrés se trouvant dans la colonne des carrés sur la même colonne horizontale que le nombre qu'il s'agit de décomposer, et l'autre carré étant la différence de ce nombre et du premier carré. Mais la table a l'inconvénient de ne pas donner les nombres qui sont les sommes de deux carrés, suivant l'ordre de leur grandeur, de sorte que, pour peu que le nombre proposé soit grand, la recherche devient assez longue parce qu'elle doit s'étendre sur un nombre considérable de colonnes. En outre, si on veut se servir du tableau pour en tirer les triangles rectangles primitifs, il offre encore l'inconvénient de ne pas exclure immédiatement les décompositions $a^2 + b^2$ ou a et b ont un facteur commun. Toutefois la manière dont le tableau est dressé, présente un moyen facile pour se débarrasser de ces décompositions. C'est de supprimer, à partir de la 3.e colonne verticale, dans chacune d'elles, soit dans la $q^{ième}$, tous les nombres dont le rang, dans cette colonne, s'exprime par les facteurs premiers de q et par les multiples de ces facteurs.

En effet, soit un nombre $N = a^2 + b^2$; on en tirera le triangle rectangle $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$, $2ab$. Si ce triangle n'est pas primitif, les trois côtés auront un facteur commun δ, donc

$$a^2 + b^2 = \lambda\delta , \quad a^2 - b^2 = \mu\delta , \quad 2ab = \nu\delta ;$$

les deux premières équations donnent

$$2a^2 = (\lambda + \mu)\delta , \qquad 2b^2 = (\lambda - \mu)\delta ,$$

d'où il suit que, si les trois côtés ont un facteur commun autre que 2, ce facteur (ou sa moitié) sera aussi facteur commun de a^2 et de b^2. Conséquemment, pour éliminer les triangles non primitifs, il est nécessaire et suffisant de supprimer premièrement les hypoténuses paires (ce que l'auteur a fait en supprimant les colonnes verticales de rang pair, ou en ne les introduisant que pour le besoin de la construction de la table), secondement de supprimer toutes les décompositions $p^2 + (p + q)^2$ où p et $p + q$, ou ce qui revient au même, où p et q auront un facteur commun. Il faut donc supprimer dans la colonne verticale de rang q tous les nombres dont le rang dans la colonne s'exprime par un facteur premier de q, ou par un multiple d'un facteur premier de q. Ainsi on effacera dans la 3e. colonne le 3.e, 6.e, 9.e nombre etc.; dans la 5.e colonne, le 5.e, 10.e, 15.e nombre etc., dans la 15.e colonne, le 3.e, 6.e, 9.e, 12.e, 15.e, 18.e etc., puis le 5.e, 10.e, 20.e, 25.e etc. Lorsque cette opération, qui ressemble au procédé d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers, est terminée, toutes les décompositions qui restent dans le tableau, ne donnent lieu qu'à des triangles rectangles primitifs.

Gauss a donné, dans les *Disquisitiones Arithmeticae*, le nombre des décompositions d'un nombre en deux carrés premiers entre eux. Cependant cette question (ainsi que le comporte le plan des *Disquisitiones*) n'y est pas traitée isolément, mais de manière à se rattacher aux parties précédentes de l'ouvrage. Comme les présentes recherches ne s'adressent pas seulement à des géomètres de profession, mais aussi à d'autres érudits qui, tout en désirant se rendre compte du fond des problèmes historiques discutés ici, pourraient trouver pénible de remonter de proposition en proposition l'enchaînement des théories de l'admirable corps de doctrine de Gauss, j'ai cru utile d'exposer en cet endroit, en me fondant sur des considérations et des démonstrations exclusivement élémentaires, de quelle manière la décomposition d'un nombre en deux carrés premiers ou non premiers entre eux, dépend de la nature des facteurs premiers dont le nombre est composé. J'appellerai, pour abréger, décomposition *primitive* une décomposition en deux carrés premiers entre eux. Je n'aurai égard qu'aux décompositions réellement distinctes, et je ne compterai pas non plus les décompositions où l'un des deux carrés est zéro.

1. *Si un nombre n'est composé que de facteurs premiers de la forme* $4m + 1$ *et tous différents, il*

n'admet que des décompositions primitives. Car si les deux carrés d'une décomposition avaient un facteur commun, il devrait être quadratique, donc le nombre donné aurait un facteur quadratique, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. *Si un nombre est composé, outre de puissances quelconques de nombres premiers de la forme $4m + 1$, aussi de puissances paires d'un ou de plusieurs nombres premiers de la forme $4m + 3$, ce nombre n'admet que des décompositions non primitives*, parce que les puissances paires des facteurs de la forme $4m + 3$ ne sont pas décomposables en deux carrés.

3. *Une puissance quelconque d'un nombre premier de la forme $4m + 1$ admet toujours une décomposition primitive, et n'en admet qu'une.*

En effet, p étant un nombre premier de la forme $4m + 1$, donc $p = a^2 + b^2$, où a et b premiers entre eux, si p^n et p^{n+1} jouissent de la propriété que je viens d'énoncer, p^{n+2} en jouira également.

Car soit $\alpha^2 + \beta^2$ la décomposition primitive de p^{n+1}, de sorte que

$$p^{n+2} = (\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = (a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2 = (a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + b\alpha)^2$$

et supposons que ces deux décompositions de p^{n+2} soient non primitives, donc, en désignant le plus grand commun diviseur des deux carrés de la première et de la seconde décomposition respectivement par δ et δ',

$$a\alpha + b\beta = l\delta, \qquad a\alpha - b\beta = r\delta'$$
$$a\beta - b\alpha = m\delta, \qquad a\beta + b\alpha = s\delta'$$

d'où

$$\alpha(a^2 + b^2) = (al - bm)\delta, \qquad \alpha(a^2 + b^2) = (ar + bs)\delta'$$
$$\beta(a^2 + b^2) = (bl + am)\delta, \qquad \beta(a^2 + b^2) = (as - br)\delta'.$$

Mais α et β étant premiers entre eux, et $a^2 + b^2$ premier, il suit de ces équations

$$\delta = \delta' = a^2 + b^2$$

donc

$$\alpha = al - bm = ar + bs$$
$$\beta = bl + am = as - br$$

et

$$\alpha^2 + \beta^2 = (a^2 + b^2)^{n+1} = (a^2 + b^2)(l^2 + m^2) = (a^2 + b^2)(r^2 + s^2)$$

de sorte que $(a^2 + b^2)^n$ admettrait les deux décompositions primitives $l^2 + m^2$ et $r^2 + s^2$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que l'une au moins des deux décompositions de p^{n+2} développées ci-dessus soit primitive.

Il reste encore à démontrer qu'elles ne peuvent pas être primitives toutes les deux. Or, soit $\gamma^2 + \delta^2$ l'unique décomposition primitive de p^n, $\alpha^2 + \beta^2$ l'unique décomposition primitive de p^{n+1}; et supposons que p^{n+2} admette deux décompositions primitives. Évidemment celles-ci ne peuvent provenir que de la combinaison de $\alpha^2 + \beta^2$ avec $a^2 + b^2$, car les autres décompositions de p^{n+1}, toutes non primitives, ne sauraient engendrer une décomposition primitive. Pour la même raison les deux mêmes décompositions primitives de p^{n+2} devraient être celles qu'on obtient par la combinaison de $\gamma^2 + \delta^2$ avec $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$. Ainsi il faudrait que les deux décompositions

$$(a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2, \quad (a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + b\alpha)^2$$

fussent identiquement les mêmes que

$$([a^2 - b^2]\gamma + 2ab\delta)^2 + ([a^2 - b^2]\delta - 2ab\gamma)^2, \quad ([a^2 - b^2]\gamma - 2ab\delta)^2 + ([a^2 - b^2]\delta + 2ab\gamma)^2.$$

Cependant pour que deux décompositions

$$g^2 + h^2, \quad i^2 + k^2$$

d'un nombre soient identiques à deux autres décompositions du même nombre

$$g_1^2 + h_1^2, \quad i_1^2 + k_1^2$$

il faut qu'un des huit systèmes suivants puisse avoir lieu

1) $g = g_1, \quad h = h_1, \quad i = i_1, \quad k = k_1.$ 5) $g = i_1, \quad h = k_1, \quad i = g_1, \quad k = h_1.$
2) $g = g_1, \quad h = h_1, \quad i = k_1, \quad k = i_1.$ 6) $g = i_1, \quad h = k_1, \quad i = h_1, \quad k = g_1.$
3) $g = h_1, \quad h = g_1, \quad i = i_1, \quad k = k_1.$ 7) $g = k_1, \quad h = i_1, \quad i = g_1, \quad k = h_1.$
4) $g = h_1, \quad h = g_1, \quad i = k_1, \quad k = i_1.$ 8) $g = k_1, \quad h = i_1, \quad i = h_1, \quad k = g_1.$

Mais on vérifie aisément qu'aucun de ces systèmes n'est compatible avec les hypothèses admises.

En effet, le système 1. donne dans notre cas

$$a\alpha + b\beta = (a^2 - b^2)\,\gamma + 2ab\delta \qquad a\alpha - b\beta = (a^2 - b^2)\,\gamma - 2ab\delta$$
$$a\beta - b\alpha = (a^2 - b^2)\,\delta - 2ab\gamma \qquad a\beta + b\alpha = (a^2 - b^2)\,\delta + 2ab\gamma$$

d'où

$$2a\alpha = 2\,(a^2 - b^2)\,\gamma, \qquad 2a\beta = 2\,(a^2 - b^2)\,\delta$$

donc

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

ce qui est impossible parce que d'un côté α et β sont premiers entre eux, de même que γ et δ, tandis que d'un autre côté on ne peut pas avoir $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

Le système 2. donne

$$a\alpha + b\beta = (a^2 - b^2)\,\gamma + 2ab\delta \qquad a\alpha - b\beta = (a^2 - b^2)\,\delta + 2ab\gamma$$
$$a\beta - b\alpha = (a^2 - b^2)\,\delta - 2ab\gamma \qquad a\beta + b\alpha = (a^2 - b^2)\,\gamma - 2ab\delta$$

d'où

$$(a + b)\,(\alpha + \beta) = 2\,(a^2 - b^2)\gamma, \qquad (a - b)\,(\alpha + \beta) = 2(a^2 - b^2)\delta$$

donc

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\gamma}{\delta};$$

mais puisque a et b sont premiers entre eux, $a + b$ et $a - b$, ne pouvant être pairs, à cause de $a^2 + b^2 = 4m + 1$, sont également premiers entre eux; et comme en même temps γ et δ sont premiers entre eux, il s'ensuivrait

$$\gamma = a + b,\ \delta = a - b;\ \text{d'où}\ \gamma^2 + \delta^2 = 2\,(a^2 + b^2)\ \text{ou}\ p^n = 2p$$

ce qui est absurde.

D'une manière semblable le système 3. conduit à la conséquence

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\delta}{\gamma},\ \text{d'où}\ p^n = 2p,$$

et le système 4. à la conséquence

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Enfin les systèmes 5. 6. 7. 8. produisent suivant l'ordre les mêmes résultats que 1. 2. 3. 4. respectivement.

Il est démontré par conséquent que, si p^n et p^{n+1} admettent une décomposition primitive et n'en admettent qu'une seule, il en est de même de p^{n+2}; or, les deux premières puissances de p admettant chacune une décomposition primitive et n'en admettant qu'une seule, savoir $p = a^2 + b^2$ et $p^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$, il s'ensuit que la même chose a lieu pour toutes les puissances de p.

4. De la démonstration précédente on conclut en même temps le nombre total des décompositions tant primitives que non primitives d'une puissance donnée de p, soit p^λ. Car chaque puissance de p n'admettant qu'une seule décomposition primitive, il est facile de voir quelles sont les décompositions non primitives de p^λ. Évidemment on les obtiendra toutes en multipliant par p^2 les deux carrés de la décomposition primitive de $p^{\lambda-2}$, par p^4 les deux carrés de la décomposition primitive de $p^{\lambda-4}$, et ainsi de suite; de sorte que p^λ admet, outre sa décomposition primitive, $\frac{\lambda-1}{2}$ décompositions non primitives si λ est impair, et $\frac{\lambda-2}{2}$ si λ est pair. Par conséquent le nombre total des décompositions de p^λ est $\frac{\lambda+1}{2}$ si λ est impair, et $\frac{\lambda}{2}$ si λ est pair.

Soit maintenant p^λ multiplié par la puissance p_1^μ d'un autre nombre premier de la forme $4m+1$. Attendu que le produit de deux sommes de deux carrés donne lieu à deux décompositions en deux carrés, et que, si l'une des deux puissances est paire, il faut avoir égard aux décompositions qui résultent de la multiplication de cette puissance même, qui est un carré, par toutes les décompositions de l'autre puissance, le nombre total des décompositions du produit $p^\lambda \cdot p_1^\mu$ sera

$$2 \cdot \frac{\lambda+1}{2} \cdot \frac{\mu+1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1) \text{ si } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont impairs,}$$

$$2 \cdot \frac{\lambda+1}{2} \cdot \frac{\mu}{2} + \frac{\lambda+1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1) \text{ si } \lambda \text{ est impair et } \mu \text{ pair,}$$

$$2 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\mu+1}{2} + \frac{\mu+1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1) \text{ si } \lambda \text{ est pair et } \mu \text{ impair,}$$

$$2 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1) - \frac{1}{2} \text{ si } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont pairs.}$$

Et par les mêmes considérations on voit que le nombre total des décompositions du nombre $p^{\lambda} \cdot p_1^{\mu} \cdot p_2^{\nu} \ldots\ldots$, où $p, p_1, p_2, \ldots\ldots$ sont des nombres premiers de la forme $4m+1$, est $\frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)\ldots$ excepté lorsque $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sont tous pairs, et que dans ce dernier cas le nombre des décompositions est $\frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)\ldots - \frac{1}{2}$.

5. Soient T et U deux nombres premiers ou non, mais premiers entre eux et admettant chacun une ou plusieurs décompositions primitives, de sorte que

$$T = A^2 + B^2, \qquad U = C^2 + D^2$$

où A et B, C et D premiers entre eux. On aura

$$TU = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2 = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$$

et je dis que ces deux décompositions sont primitives. Car supposons le contraire, et soit

$$AC + BD = P\Delta, \qquad AD - BC = Q\Delta$$

on aura

$$A(C^2 + D^2) = (CP + DQ)\Delta$$
$$B(C^2 + D^2) = (DP - CQ)\Delta$$

et, A et B étant premiers entre eux, il faudra que Δ soit diviseur de U. En même temps

$$C(A^2 + B^2) = (AP - BQ)\Delta$$
$$D(A^2 + B^2) = (BP + AQ)\Delta$$

et, C et D étant premiers entre eux, il faudra que Δ soit diviseur de T. Les nombres T et U auraient donc un facteur commun contrairement à l'hypothèse, d'où il suit que la première décomposition de TU est primitive; et de la même manière on démontre que la seconde l'est également.

On conclut de là et du N° 3 qu'*un nombre composé de puissances quelconques de n nombres premiers de la forme $4m+1$ admet 2^{n-1} décompositions primitives.*

6. Si un nombre contient comme facteur une puissance de 2 supérieure à la première, il n'admet aucune décomposition primitive, parce que les puissances paires de 2 ne se décomposent pas du tout en deux carrés, et que les puissances impaires de 2 ne se décomposent qu'en deux carrés égaux. Si le nombre contient le facteur 2 à la première puissance seulement, il admet autant de décompositions primitives que son quotient par deux; on les aura en remplaçant chaque décomposition primitive $a^2 + b^2$ de ce dernier par $(a+b)^2 + (a-b)^2$. Mais, ainsi que nous l'avons vu dans les observations précédentes, aucune de ces décompositions ne peut donner lieu à un triangle rectangle primitif.

Je fais observer encore que les nombres du tableau ci-dessus sont exprimés, dans le texte manuscrit, au moyen des lettres numérales.

Le premier (nombre) impair que nous trouvions dans la table, lequel est 5, se divise donc en deux parties dont on peut extraire la racine, car ce qui (se trouve) en regard de lui dans la seconde ligne (verticale) est 1, et lorsqu'on retranche cela du (cinq), il reste 4; or 1, 4 sont deux parties dont on peut extraire

la racine. On trouve le 5 après un impair, à savoir trois, à partir de l'unité qui est le premier des impairs.

Ensuite 13 se divise dans ce qui se trouve en regard de lui dans la seconde ligne, à savoir 4, et dans ce qui reste, lorsqu'on retranche du (treize) 4, ce qui est 9. Et 13 (se trouve) après trois impairs à partir du 5, qui sont 7, 9, 11.

Ensuite 17 se divise en ce qui se trouve en regard de lui, à savoir 1, et en ce qui reste, lorqu'on en retranche 1, à savoir 16. Et 17 (se trouve) après un impair à partir du 13, lequel est 15.

Ensuite 25, après trois impairs, qui sont 19, 21, 23, se divise en 9, 16. Ensuite 29, après un impair, se divise en 4, 25. Ensuite 37, après trois impairs, se divise en 1, 36. Ensuite 41, après un impair, se divise en 16, 25.

Ensuite (quant à) 49, après trois impairs, nous trouvons qu'il ne se divise pas en deux parties dont on puisse extraire la racine.

Ensuite 53, après un impair, se divise en 4, 49. Ensuite 61, après trois impairs, se divise en 25, 36.

Ensuite 65, après un impair, se divise en 1, 64, et se divise aussi en 16, 49. C'est pourquoi cet impair sous-tend deux triangles différents.

fol. 88 *verso.* Ensuite 73, après trois impairs, | se divise en 9, 64.

Ensuite (quant à) 77, après un impair, nous trouvons qu'il ne se divise pas en deux parties dont on puisse extraire la racine.

Ensuite 85, après trois impairs, se divise en 4, 81, et se divise aussi en 36, 49. C'est pourquoi il sous-tend deux triangles différents.

Ensuite 89, après un impair, se divise en 25, 64. Ensuite 97, après trois impairs, se divise en 16, 81. Ensuite 101, après un impair, se divise en 1, 100. Ensuite 109, après trois impairs, se divise en 9, 100. Ensuite 113, après un impair, se divise en 49, 64.

Ensuite 117, après un impair, se divise en 36, 81; car ce (nombre) devient comme le commencement, à la manière du cinq qui est le premier impair qui se divise en deux parties dont on peut extraire la racine, (et qui se trouve) après un impair à partir de l'unité, laquelle est le premier des impairs.

Ensuite 125, après trois impairs, se divise en 25, 100, et aussi en 4, 121. C'est pourquoi il sous-tend deux triangles différents.

Ensuite on continue à opérer d'après cette méthode évidente en allant dans les (nombres) impairs jusqu'à l'infini.

La raison de cette manière d'avancer tantôt d'un impair et tantôt de trois impairs, s'explique par ce qui est noté dans la table.

Si (dans) cette manière d'avancer (on) arrive à un (nombre) impair qui devrait se diviser en deux carrés, et qui ne se divise pas (de cette manière, on) arrive ensuite à un (nombre) impair peu éloigné du (premier), qui, par compensation, se divise en quatre parties dont on peut extraire la racine. Ainsi, après que 49 ne s'est pas laissé diviser, 65 se divise ensuite en quatre parties dont on peut extraire la racine; et après 77, qui ne se divise pas, 85 se divise en quatre parties dont on peut extraire la racine.

OBSERVATIONS.

En prenant les nombres contenus dans le tableau, suivant l'ordre de leur grandeur, afin de les décomposer un à un en deux carrés par les moyens que le tableau offre pour cette opération, l'auteur s'aperçoit qu'entre deux nombres successifs sont compris alternativement un et trois nombres impairs. Mais méconnaissant la véritable loi de cette propriété, à savoir qu'elle est invariable et continue à avoir lieu de la même manière jusqu'à l'infini, l'auteur se fourvoie, et arrivé au nombre 113, au lieu de passer de là à 121 en sautant trois impairs, croit voir dans le nombre 117 le commencement d'une nouvelle série semblable à celle qu'il vient de considérer, et qui s'étend depuis 5 jusqu'à 113. La nouvelle série serait donc 117, 125, 129, 137, 141, 149, 153, 161, 165, 173, etc., au lieu de 121, 125, 133, 137, 145, 149, 157, 161, 169, 173, etc., et ne renfermerait pas les nombres 145, 157, 169, 181, 193, 205, etc., qui sont décomposables en deux carrés. L'erreur de l'auteur est d'autant plus singulière que ces derniers nombres se trouvent encore dans la partie du tableau des nombres décomposables en deux carrés qu'il a dressée lui-même, et que l'on a vue ci-dessus.

L'auteur dit que la loi de la série se manifeste par les nombres même contenus dans le tableau, mais cette raison est insuffisante; car en procédant comme il le fait, l'auteur passe le nombre 45 qui cependant figure dans le tableau. Il est vrai que ce nombre n'est pas hypoténuse d'un triangle primitif mais cela n'empêcherait pas l'auteur de l'admettre, ainsi qu'on le voit par les décompositions $117 = (3.\ 2)^2 + (3.\ 3)^2$ et $125 = (5.\ 1)^2 + (5.\ 2)^2$.

En somme l'auteur ne paraît pas avoir bien approfondi ce point; et si on se rappelle la netteté et la justesse avec lesquelles l'auteur du fragment anonyme s' exprime dans le N.° 3 de ce fragment où il traite le même sujet, on ne peut pas manquer d'être frappé du contraste que ce numéro présente avec les méprises et inadvertances que l'on vient de voir commettre à l'auteur du présent traité.

Mais cette circonstance me semble confirmer ce que j'ai dit ci-dessus à la fin des observations 4 (pag. 8), à savoir que le fragment anonyme fut composé probablement vers le milieu ou dans le troisième quart du Xe siècle de notre ère. En effet, en lisant la suite du présent traité on ne pourra méconnaître l'uniformité que présente en général la marche suivie dans l'exposé de la théorie des triangles rectangles numériques tant par l'auteur du fragment anonyme que par Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn, uniformité qui paraît indiquer une certaine tradition d'école, un certain cadre commun qu'il était d'usage de remplir, en enrichissant d'ailleurs le sujet d'autant d'observations ou de découvertes originales que possible. Eu égard à ces points de ressemblance qui doivent nous porter à admettre qu'il existait des rapports plus ou moins suivis entre les savants qui cultivaient les mathématiques en Orient, il est peu vraisemblable que, un des points principaux de la théorie en question, tel que la série qui contient les hypoténuses des triangles rectangles primitifs, ayant été une fois nettement énoncé et défini, on ait pu longtemps après tomber encore dans des incertitudes et des erreurs au sujet de ce même point. Or, on a vu qu'il y a quelque raison de croire que le présent traité fut écrit dans la dernière moitié du Xe siècle ; je suis donc disposé à penser qu'il faut placer la composition du fragment anonyme à peu près à la même époque, ou peu avant.

Je fais observer encore que les nombres qui sont exprimés ci-dessus et qui seront exprimés dans la suite de la présente traduction au moyen de nos chiffres modernes, sont exprimés dans le texte manuscrit par les lettres numérales.

Nous proposerons (maintenant) des exemples (fondés) sur ce (qui précède) pour faciliter l'intelligence de ce (qui concerne la formation des triangles rectangles).

Nous commençons par le nombre 5 parce qu'il est le premier (nombre) impair qui se divise en deux parties dont on peut extraire la racine. Ce sont, comme nous l'avons dit, 1, 4. (Nous fondons) notre opération sur (cette base) que 5 soit la sous-tendante de l'angle droit d'un triangle. Nous prenons les racines des deux parties; ce sont un et deux. Nous multiplions leur somme par leur différence; (le résultat) est trois, et cela est l'un des deux (autres) côtés, ainsi que

nous l'avons démontré dans ce qui précède. Nous multiplions (ensuite) l'une des deux racines par l'autre (prise) deux fois, et le produit est le second côté.

Au nombre 5 succède le nombre 13. Ses deux parties dont on peut extraire la racine, sont quatre et neuf, et leurs racines deux et trois. Nous multiplions leur somme par leur différence, (le produit) est cinq; et nous multiplions l'une par l'autre (prise) deux fois, (le produit) est douze. L'hypoténuse du triangle est donc 13, et ses deux (autres) côtés 5, 12.

Quant à 17, ses deux parties dont on peut extraire la racine sont un et seize, le produit de la somme de leurs racines par leur différence est quinze, et le produit de l'une des deux racines par l'autre (prise) deux fois est huit. Les deux (autres) côtés du triangle dont l'hypoténuse est 17, sont donc 8, 15.

A cela succède ensuite 25 dont les deux parties dont on peut extraire la racine sont neuf et seize. Le produit de la somme de leurs racines par leur différence est sept. ce qui est l'un des deux (autres) côtés du triangle; et le produit de l'une des deux racines par l'autre (prise) deux fois, qui est le second côté, est vingt quatre.

Ensuite (vient) 29. Ses deux parties dont on peut extraire la racine sont quatre et vingt cinq, et leurs racines deux et cinq. Le produit de leur somme par leur fol. 89 *recto.* différence, laquelle est trois, est vingt un; et le produit | de l'une des deux (racines) par l'autre (prise) deux fois est vingt. Ces deux (nombres) sont les deux (autres) côtés du triangle dont l'hypoténuse est 29.

Si l'on opère de la même manière sur les (nombres) impairs suivants qui se divisent chacun en deux parties dont on peut extraire la racine, il résulte de 37 un triangle dont les deux (autres) côtés sont 12, 35; de 41 un triangle dont les deux (autres) côtés sont 9, 40; de 53 un triangle dont les deux (autres) côtés sont 28, 45; de 61 un triangle dont les deux (autres) côtés sont 11, 60.

Quant à 65 qui est le (nombre) impair qui se divise en quatre parties dont on peut extraire la racine, les deux premières de ces (parties) sont un et soixante quatre, leurs racines un et huit, le produit de la somme de celles-ci par leur différence est soixante trois, et le produit du double de l'une d'elles par l'autre seize. Les deux autres parties sont seize et quarante neuf, le produit de la somme de leurs racines par leur différence est trente trois, et le produit du double de l'une d'elles par l'autre cinquante six. Conséquemment soixante cinq est hypoténuse de deux triangles dont l'un a pour ses deux (autres) côtés 63, 16, et l'autre 33, 56.

De la même manière se fait l'opération pour les autres (nombres) impairs qui se divisent en deux ou en plusieurs parties dont on peut extraire la racine.

OBSERVATION.

L'auteur fait usage du théorème qu'il a démontré ci-dessus dans la seconde de ses propositions préliminaires, pour construire les triangles rectangles en nombres entiers qui ont pour hypoténuses respectivement les nombres 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, en formant pour chaque décomposition $a^2 + b^2$ d'une hypoténuse les quantités $(a + b)(a - b)$ et $2ab$ qui donnent les deux cathètes.

Comme les triangles engendrés par ces (nombres) impairs sont les premiers et les souches, les côtés d'aucun de ces triangles n'ont de facteur commun avec les côtés d'un des autres. Mais quant aux triangles qui sont dérivés de chacun de ceux-là, ce sont des triangles tels que les côtés de chacun d'eux sont des multiples postérieurs des côtés du triangle qui est le (triangle) primitif. Tels sont le triangle dont l'hypoténuse est dix, et les deux (autres) côtés six, huit ; et le triangle dont l'hypoténuse est deux et demi, et les deux (autres) côtés un et demi, deux. Ces deux (triangles) font partie des (triangles) dérivés du triangle (5, 3, 4) qui précède, et leurs côtés ont des facteurs communs les uns avec les autres. C'est pourquoi il est inutile d'opérer sur les (nombres) pairs. Car si on a produit le triangle relatif à l'impair, on a produit par là le triangle relatif au pair qui vient à sa suite.

OBSERVATIONS.

L'auteur introduit ici la notion des triangles rectangles dérivés par opposition aux triangles rectangles primitifs. L'emploi du terme « primitif » (*awwalî*) dans le passage ci-dessus, et déjà précédemment pag. 39, lig. 17, mérite d'être remarqué, le terme employé habituellement dans le fragment anonyme dont la traduction précède, étant « triangle souche, » (*açl*). Je fais observer, en outre, que les derniers mots du passage ci-dessus : « le triangle relatif au pair qui vient à sa suite » (comparer pag. 39, lig. 7), signifient : « le triangle ayant une hypoténuse paire et dérivé du triangle à hypoténuse impaire », et que, pour désigner le triangle dérivé, l'auteur du présent traité se sert le plus souvent du terme *tâbi'* qui signifie littéralement « suivant », mais que je traduirai dans la suite par « dérivé ». Le terme propre pour exprimer « dérivé » est *far'on* ou *mafroû'on*.

L'auteur dit que les triangles rectangles engendrés par « ces nombres impairs » sont primitifs. Si l'on n'entend par « ces nombres impairs » que strictement les nombres 5, 13, 17 etc. jusqu'à 65, considérés dans le passage précédent, cette assertion est exacte. Mais comme l'auteur ne dit rien des impairs qui donnent lieu à des triangles rectangles non primitifs, on est tenté de lui supposer la pensée que tous les nombres impairs qui restent dans le tableau proposé ci-dessus (pag. 41), après qu'on y a supprimé les colonnes paires, donnent lieu à des triangles rectangles primitifs. Ce serait une erreur, ainsi qu'on a pu le voir par les explications relatives à ce point, contenues dans des observations précédentes.

Ce que nous avons exposé précédemment, a ouvert aussi la route qui conduit à la connaissance de ces triangles sans la connaissance (préalable) des hypoténuses, mais au moyen des nombres se succédant à partir de l'unité suivant l'ordre naturel. Proposons donc une partie de ces nombres (ordonnés) de cette manière : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Le premier et le second de ces (nombres) sont les racines des deux parties (1 et 4) du cinq qui est la première des hypoténuses. Le second et le troisième sont les racines des deux parties du treize. Le troisième et le quatrième sont les racines des deux parties du vingt cinq. Et de cette manière deux quelconques de ces nombres, contigus suivant cet ordre, sont les racines des deux parties d'une des hypoténuses ci-dessus mentionnées. Conséquemment le produit de la somme de deux quelconques de ces nombres contigus l'un à l'autre, par leur différence, est un des deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un des triangles qui sont les souches. Le produit de l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois est l'autre côté; et l'hypoténuse du (triangle) est la somme des carrés des deux nombres, parce que ceux-ci sont égaux aux racines des deux parties de l'hypoténuse.

Par exemple, le produit de la somme (des nombres) 1, 2 de la suite proposée, par leur différence, est trois; le produit de l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois, quatre; le produit de 1 par lui même un, le produit de 2 par lui-même quatre, et la somme des deux (produits) cinq. Le premier triangle
fol. 89 *verso.* vient donc d'être produit | au moyen de 1, 2 qui occupent la place de deux nombres contigus.

Par une opération semblable il résulte de 2, 3 le triangle dont l'hypoténuse est 13 et les deux (autres) côtés 5, 12; de 3, 4 le triangle dont l'hypoténuse est 25 et les deux (autres) côtés 7, 24 ; de 4, 5 le triangle dont l'hypoténuse est 41 et les deux (autres) côtés 9, 40 ; de 5, 6 le triangle dont l'hypoténuse est 61 et les deux (autres) côtés 11, 60. Et de la même manière il résulte, au moyen de cette opération, de tous les nombres contigus, pris deux à deux les uns après les autres, d'autres (triangles rectangles) dont les plus petits côtés seront les nombres impairs suivant l'ordre, à partir du premier impair qui est trois.

Lorsque les deux (autres) côtés d'un triangle (rectangle) ont été produits au moyen de deux nombres contigus, la connaissance de son hypoténuse (peut être obtenue) de trois manières. L'une de ces (manières consiste en ce) que l'on additionne les carrés des deux côtés et que l'on prend la racine de la somme, ce qui est une méthode générale pour trouver l'hypoténuse de tout triangle rectangle; et cela est évident. La seconde manière (consiste) à prendre la différence des deux nombres, à la multiplier par elle-même, et à ajouter le (produit) au côté qui est pair. Alors (le résultat) sera l'hypoténuse parce que l'excédant de l'hypoténuse sur ce côté est (le carré de) la différence des deux nombres au moyen desquels ont été produits les deux côtés du triangle. La troisième (manière consiste) à multiplier le plus petit des deux nombres par lui-même, à doubler ce qu'on obtient, et à ajouter (le résultat) au côté qui est impair. Il en résulte l'hypoténuse parce que l'excédant de l'hypoténuse sur le côté qui est impair, est égal au double du carré du plus petit des deux nombres. C' est ce que nous avons déjà démontré dans les théorèmes que nous avons proposés (ci-dessus). Par exemple (dans) le premier triangle l'hypoténuse, qui est cinq, dépasse le côté qui est quatre, du carré de l'unité qui est la différence entre 1, 2; et dépasse trois du double du carré du plus petit des deux nombres qui est un.

OBSERVATION.

Nous avons déjà vu, dans les observations relatives au N.° 8 du fragment anonyme (voir ci-dessus, pag. 11), que le triangle

$$[2m+1]^2+[2m(m+1)]^2=[m^2+(m+1)^2]^2$$

formé au moyen des nombres m et $m+1$, est toujours primitif. On voit aussi que le plus petit côté $2m+1$ prend successivement pour valeurs tous les nombres impairs, pendant que m prend pour valeurs tous les nombres entiers. Quant aux trois manières de trouver l'hypoténuse, il est évident que

1) $m^2+(m+1)^2=\sqrt{[2m+1]^2+[2m(m+1)]^2}$

2) $m^2+(m+1)^2=[(m+1)-m]^2+2m(m+1)$

3) $m^2+(m+1)^2=2m^2+(2m+1)$.

La proposition à laquelle l'auteur fait allusion, est le 3.e de ses théorèmes préliminaires (voir ci-dessus, pag. 38, lig. 13 à dernière).

(Étant proposés les trois nombres) 1, 2, 3; si l'on en multiplie le premier par le troisième, il résulte l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du premier triangle; et si on additionne (les mêmes deux nombres) l'un à l'autre, il résulte l'autre côté. Il existe donc une troisième méthode de trouver ce triangle. Et comme il est indifférent que l'on additionne les deux (nombres) extrêmes, ou que l'on multiplie le (nombre) moyen par deux; attendu que le moyen de trois nombres consécutifs quelconques est la moitié (de la somme) des deux extrêmes: le produit de 2 par deux est égal à la somme de 1, 3 qui est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit).

L'opération d'après cette méthode produit des triangles à côtés rationnels qui sont en partie primitifs, et en partie dérivés. Le triangle primitif est celui qui est produit, lorsque l'un des deux extrêmes des trois (nombres) est pair et l'autre impair (*sic*); et s'ils sont tous les deux pairs, le triangle qui est produit, est dérivé d'un triangle qui précède.

Par exemple, (étant proposés), 2, 3, 4; si l'on multiplie le premier de ces (nombres) par le troisième, (le produit) est un des deux côtés (comprenant l'angle droit); et si on les additionne l'un à l'autre, ou que l'on multiplie 3 par deux, (le résultat) est l'autre côté. Or, chacun de ces deux côtés est le double du côté correspondant du triangle précédent, qui est produit au moyen des (nombres) 1, 2; car le trois mesure le six, et le quatre mesure le huit; les côtés des deux triangles ont donc un rapport commun.

Mais quant à 3, 4, 5; si le premier de ces (nombres) est multiplié par le troisième, on aura l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du troisième triangle, à savoir de celui dont l'hypoténuse est 17. Et si on les additionne l'un à l'autre, ou que l'on multiplie le (nombre) moyen par deux, on aura l'autre côté.

Si les nombres (proposés) sont 4, 5, 6, le produit du premier par le troisième est 24, et leur somme, ou le produit du (nombre) moyen par deux, 10. Chacun de ces deux (resultats) est le double | du côté correspondant du triangle précédent qui est produit au moyen de 3, 4, 5 (?). Si les nombres sont 5, 6, 7, il en résulte, par cette opération, le triangle dont l'hypoténuse est trente sept. Si les nombres sont 6, 7, 8, il en résulte le triangle dont chacun des deux côtés (comprenant l'angle droit) est double du côté correspondant du triangle résultant de 5, 6, 7 (?). Ensuite cela a lieu de la même manière pour trois nombres consécutifs quelconques des (nombres) suivants. fol. 90 *recto.*

Si l'on connait les deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un triangle produit au moyen de trois nombres consécutifs, pour (obtenir) la connaissance de l'hypoténuse on aura à examiner. Si l'un des deux côtés est pair, et l'autre impair, on multiplie le premier des trois nombres par lui-même, et on ajoute le produit au côté qui est pair; ou on prend la différence entre le premier et le troisième (nombre), et on l'ajoute au côté qui est impair. Il résultera l'hypoténuse. Nous avons

mentionné dans ce qui précède la manière de connaître (l'hypoténuse) par la méthode générale.

OBSERVATIONS.

On trouve ci-dessus, dans les observations au N.° 9 du fragment anonyme (voir pag. 12), quelques remarques concernant la formation des triangles rectangles en nombres entiers au moyen de trois nombres entiers consécutifs.

L'auteur du présent traité commet ici deux nouvelles erreurs. La première pourrait n'être qu' un simple *lapsus calami*. C'est lorsqu'il dit que le triangle sera primitif, si le premier des trois nombres est pair et le troisième impair, au lieu de dire: si le premier et le troisième nombre sont impairs.

La seconde erreur consiste en ce que l'auteur paraît croire que, lorsque des trois nombres $m-1$, m, $m+1$ on a déduit un triangle non primitif, m étant impair, les côtés de ce triangle sont doubles de ceux du triangle que l'on déduit par la même opération des trois nombres $m-2$, $m-1$, m. Non seulement on vérifie immédiatement que cette assertion est fausse pour les triangles déduits des nombres 4, 5, 6 et 6, 7, 8 dont les côtés seraient, d'après l'auteur, doubles de ceux des triangles déduits des nombres 3, 4, 5 et 5, 6, 7 respectivement; mais on voit même qu'il n'existe qu'un seul triangle déduit de la manière ci-dessus de trois nombres consécutifs, dont les côtés soient doubles d'un autre triangle déduit de trois nombres consécutifs.

En effet, les deux cathètes du triangle rectangle déduit des nombres $m-1$, m, $m+1$ sont m^2-1, $2m$; et si le triangle est non primitif parce que m est impair, de sorte que $m=2\mu+1$, ces deux cathètes s'expriment par $2(2\mu^2+2\mu)$, $2(2\mu+1)$. Si les moitiés de ces cathètes sont égales aux cathètes d'un triangle déduit des trois nombres consécutifs $m'-1$, m', $m'+1$, on aura

$$m'^2-1=2\mu+1\ , \qquad 2m'=2\mu(\mu+1)$$

d'où

$$m'\mu=2\ ;$$

et, come $m'>\mu$, il n'existe qu'une seule solution en nombres entiers: $\mu=1$, $m'=2$; c'est à dire que les côtés du triangle déduit des nombres 2, 3, 4 sont doubles des côtés du triangle déduit des nombres 1, 2, 3.

Du reste le copiste du morceau (probablement le géomètre Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalil Alsidjzl) a hésité à l'endroit où l'auteur dit que le triangle déduit des nombres 4, 5, 6 a les cathètes doubles de celui déduit des nombres 3, 4, 5; il a commencé par rayer, dans 3, 4, 5, le nombre 4; mais s'apercevant probablement que c'était une erreur de l'auteur lui-même, il n'a pas fait d' autre changement.

Je fais observer aussi que déjà dans la phrase: « et s'ils sont tous les deux pairs, le triangle qui est produit, est dérivé d'un triangle qui précède », le texte porte littéralement: « est dérivé du triangle qui précède. » Mais l'article arabe n'ayant pas toujours la même force déterminante que notre article déterminé, il y avait lieu de traduire de manière à ne pas faire énoncer à l'auteur une erreur, tant qu'il n'était pas évident qu'il s'était trompé.

On a vu déjà à une occasion précédente que l'auteur du présent traité est bien inférieur, comme géomètre, à l'auteur du fragment anonyme. Aussi ce n'est pas sa valeur comme mathématicien qui m'engage à donner la présente traduction de son écrit, mais la circonstance que ce traité sert à compléter à divers égards le fragment anonyme; qu'il montre, par l'identité des objets discutés dans les deux ouvrages, quelle était la manière dont cette partie des mathématiques fut traitée généralement par les géomètres arabes du X.e siècle; et sourtout que la théorie des nombres congruents, qui nous intéresse ici principalement, occupe dans le présent traité la même place importante que dans le fragment anonyme.

Les observations de l'auteur sur la manière de trouver l'hypoténuse m^2+1 du triangle rectangle déduit des trois nombres consécutifs $m-1$, m, $m+1$ sont exactes; on a en effet

$$(m-1)^2+2m=m^2+1$$

$$[\,(m+1)-(m-1)\,]+(m^2-1)=m^2+1.$$

(Étant proposés les quatre nombres) 1, 2, 3, 4; si l'on en additionne les deux extrêmes, il résulte l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du second triangle, à savoir de celui dont l'hypoténuse est 13; et le produit de l'un des deux (nombres) moyens par l'autre (pris) deux fois, est le second côté. Il existe par conséquent une troisième méthode pour (arriver à) la connaissance de ce (triangle). L'opération (faite) d'après cette méthode produit des triangles à côtés rationnels qui sont tous primitifs.

Par exemple, (soient proposés) 2, 3, 4, 5. La somme des deux extrêmes de ces (nombres) est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle dont l'hypoténuse est 25; et le produit de 3 par 4 (pris) deux fois, est le second côté. Pareillement (soient proposés) 3, 4, 5, 6. Si l'on en additionne les deux extrêmes, il résulte l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle dont l'hypoténuse est 41; et si on multiplie 4 par 5 (pris) deux fois, il provient le second côté. Et si on opère de la même manière sur tous les (groupes de) quatre nombres consécutifs, les uns après les autres, suivant cet ordre, il résulte des triangles primitifs dont les plus petits côtés sont les (nombres) impairs suivant l'ordre à partir du cinq.

Si les quatre nombres consécutifs, (ordonnés) de cette manière sont 3, 4, 5, 6, et que l'on y joigne ensuite deux nombres dont l'un les précède et dont l'autre les suive, à savoir 2, 7, de sorte que ce soient six nombres consécutifs (ordonnés) de la manière suivante 2, 3, 4, 5, 6, 7; alors, si l'on additionne les deux extrêmes des quatre (nombres) du premier arrangement, et si on multiplie l'un des deux moyens par l'autre (pris) deux fois, afin qu'il en résulte les deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un de ces triangles, les deux côtés du même triangle résulteront exactement aussi de l'addition des deux extrêmes des six nombres du second arrangement, et de la multiplication de l'un des deux moyens par l'autre (pris) deux fois. Car la somme des deux extrêmes est la même dans les deux arrangements, et les deux moyens ne sont pas changés.

De même, si l'on ajoute aux nombres du premier arrangement deux nombres qui les précèdent et deux nombres qui les suivent, de sorte que l'on ait huit nombres consécutifs (arrangés) de la manière suivante 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et que l'on exécute ensuite sur ces nombres ce que nous venons de dire en fait d'addition des deux extrêmes et de multiplication de l'un des deux moyens par l'autre (pris) deux fois, il en résulte les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle qui avait été produit au moyen de quatre nombres et au moyen de six nombres.

Mais si l'on ajoute deux nombres au commencement des nombres 3, 4, 5, 6, de sorte que ce soient six nombres consécutifs | (arrangés) de la manière suivante fol. 90 *verso*. 1, 2, 3, 4, 5, 6; ou si on ajoute deux nombres à la fin, de sorte que (les six nombres) soient (arrangés) de la manière suivante 3, 4, 5, 6, 7, 8; le triangle est changé par suite du changement du premier (terme) extrême dans le premier arrangement, par suite du changement du dernier (terme) extrême dans le second arrangement, et par suite du changement des deux (termes) moyens dans tous les deux.

Si les deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un triangle sont connus au moyen de cette opération, (le moyen d'arriver à) la connaissance de son hypoténuse est de multiplier le plus petit des deux (nombres) moyens par lui-même, de doubler ce qui en provient, et d'ajouter (le résultat) au plus petit des deux côtés qui est toujours impair. Ce qui résulte est l'hypoténuse.

OBSERVATION.

Nous avons déjà vu ci-dessus, dans les observations au N.° 10 du fragment anonyme, que ces règles concernant la formation de triangles rectangles au moyen de quatre, six ou huit nombres consécutifs sont identiques à celle de Pythagore. Les triangles engendrés sont de la forme

$$[2m+1]^2 + [2m(m+1)]^2 = [2m(m+1)+1]^2,$$

les plus petits côtés $(2m+1)$ sont les nombres impairs suivant l'ordre. La méthode indiquée par l'auteur pour trouver l'hypoténuse, et qui s'exprime par la formule

$$2m^2 + (2m+1) = 2m(m+1) + 1\ ,$$

n'est autre chose que la 3.e manière de trouver l'hypoténuse, qu'il a donnée à l'occasion des triangles rectangles formés au moyen de deux nombres consécutifs (voir ci-dessus, pag. 50, ligg. 24 et dernière).

Pareillement, si nous posons des nombres impairs consécutifs à partir du premier impair, soient 3, 5, 7, 9, 11, 13, et si nous multiplions 3 par 7 et 5 par quatre, il en résulte les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle dont l'hypoténuse est 29, lesquels sont 20, 21, comme nous l'avons montré dans ce qui précède. Et si nous multiplions 5 par 9 et 7 par quatre, il en résulte les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle dont l'hypoténuse est 53, savoir 28, 45. Si nous exécutons la même opération sur les trois nombres 7, 9, 11, nous obtenons un triangle (rectangle) primitif; et pareillement si nous opérons sur les nombres 9, 11, 13, nous obtenons un autre triangle (rectangle) primitif.

Conséquemment, (si l'on prend) trois (nombres) impairs quelconques, consécutifs suivant l'ordre naturel, le produit du premier par le troisième est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un des triangles primitifs, et le produit du moyen des (trois nombres) par quatre est le second côté.

(Le moyen d'arriver à) la connaissance de l'hypoténuse (consiste en ce) que nous multiplions le premier des trois (nombres) par lui-même, et que (le produit) est ajouté au plus petit des deux côtés qui est toujours pair. Ce qui résulte est l'hypoténuse.

Pareillement (si l'on prend) quatre nombres impairs consécutifs quelconques, la somme des deux extrêmes est un des deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un triangle primitif, et le produit de l'un des deux moyens par l'autre est le second côté. (Soient proposés) par exemple, 3, 5, 7, 9. La somme de 3, 9 est douze, et le produit de 5 par 7 est trente cinq. Ces deux (nombres) sont les deux (autres) côtés du triangle dont l'hypoténuse est 37. Et l'excédant de cette hypoténuse sur le plus petit des deux (autres) côtés, est le carré du premier des deux (nombres) moyens.

OBSERVATION.

Les mêmes règles sur la formation des triangles rectangles au moyen de trois ou quatre nombres impairs consécutifs se trouvent dans le N.° 11 du fragment anonyme (voir ci-dessus pagg. 14, 15). Quant aux règles données ici relativement à la formation de l'hypoténuse, on a en effet (puisque $m > 1$), pour le premier cas

$$(2m-1)(2m+3) > 4(2m+1) \quad \text{et} \quad (2m-1)^2 + 4(2m+1) = (2m+1)^2 + 4,$$

pour le second cas

$$(2m-1)(2m+1) > 4m \quad \text{et} \quad (2m-1)^2 + 4m = (2m)^2 + 1.$$

Le passage auquel l'auteur fait allusion pour la formation du triangle $20^2 + 21^2 = 29^2$, se trouve ci-dessus pag. 48, lig. 17 à 21.

Comme le premier nombre impair se divise seulement en un et deux; que le second impair, à savoir 5, se divise en un et quatre, et en deux et trois; que le troisième impair, à savoir 7, se divise en un et six, en deux et cinq, et en trois et quatre; que 9 se divise en un et huit, en deux et sept, en trois et six, et en quatre et cinq; et comme il est résulté de chaque couple de ces parties un triangle (rectangle), ainsi que nous l'avons montré par des exemples dans ce qui précède, lorsque nous avons multiplié la somme des deux parties par leur différence, et lorsque nous avons multiplié l'une des deux (parties) par l'autre (prise) deux fois : (il s'ensuit que) le produit de la somme de deux nombres différents quelconques dont la somme est impaire, par leur différence est l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un des triangles primitifs; et le produit de l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois est le second côté, à cela près que pour tous les couples de ces parties | qui ont un diviseur commun, fol. 91 *recto.*
le triangle qui en résulte, est dérivé d'un triangle primitif qui précède.

Nous trouvons, par exemple, parmi les parties dans lesquelles se divise le neuf, trois et six qui ont un diviseur commun. Les deux côtés (comprenant l'angle droit) du triangle qui en résulte sont vingt sept et trente six, et son hypoténuse est quarante cinq. Ce (triangle) est de l'espèce du triangle dont les deux côtés (comprenant l'angle droit) sont trois et quatre, et dont l'hypoténuse est cinq. Nous ne trouvons pas cela parmi les parties du 11, ni parmi les parties du 13. Mais quant à 15, il se divise en un et quatorze, en deux et treize, en trois et douze qui ont un diviseur commun, en quatre et onze, en cinq et dix qui ont un diviseur commun, en six et neuf qui ont un diviseur commun, et en sept et huit. L'opération (appliquée) à chacun des couples de ces parties qui ont un diviseur commun produit un triangle qui est de l'espèce d'un triangle précédent. D'une manière semblable chacun des nombres impairs jusqu'à l'infini se divise dans les parties dans lesquelles il est décomposable, et on opérera sur chaque couple de ces (parties de la manière) que nous venons de décrire.

OBSERVATION.

La même règle concernant la formation des triangles rectangles au moyen de deux nombres quelconques premiers entre eux, se trouve dans les numéros 6 et 7 du fragment anonyme (voir ci-dessus pagg. 9 à 11; comparer aussi les observations au N.° 3, pag. 5 et suiv.).

Le passage du présent traité auquel l'auteur fait allusion comme contenant des exemples de cette manière de former des triangles rectangles, se trouve ci-dessus pag. 47, lig. 6 en remontant et suiv.)

De ce qui précède il résulte un certain nombre de manières de trouver ces triangles. Telles sont :

l'opération au moyen du nombre impair dont le carré se divise en deux nombres carrés;

l'opération au moyen des racines des deux parties dans lesquelles se divise chacun des (nombres) impairs;

l'opération au moyen de deux nombres consécutifs quelconques;

l'opération au moyen de trois nombres consécutifs quelconques;

l'opération au moyen de quatre, de six, ou de huit nombres consécutifs quelconques, ou d'un plus grand nombre, en augmentant de deux en deux nombres;

l'opération au moyen de trois nombres impairs consécutifs quelconques;

l'opération au moyen de quatre nombres impairs consécutifs quelconques;

l'opération au moyen de deux nombres différents quelconques dont la somme est impaire.

Ces manières tiendront lieu des autres, s'il plaît à Dieu.

OBSERVATION.

Voici les endroits du présent traité où se trouvent exposées les méthodes énumérées dans la récapitulation ci-dessus : la première, pag. 36, lig. 28 et suiv.; la seconde, qui n'est pas essentiellement différente de la première, pag. 40, lig. 4 et suiv. et pag. 47, lig. 41 et suiv.; la troisième, pag. 49, lig. 31 et suiv.; la quatrième, pag. 51, lig. 3 et suiv.; la cinquième, pag. 53, lig. 1 et suiv.; la sixième, pag. 54, lig. 16 et suiv.; la septième, pag. 54, lig. 33 et suiv.; la huitième, pag. 55, lig. 11 et suiv.

(Si nous examinons) les triangles (rectangles) qui sont produits au moyen de deux nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, (nous trouvons que) l'aire du premier de ces (triangles) est égale à la moitié de la somme de ses côtés, que l'aire du second est égale à la somme de ses côtés, l'aire du troisième égale à la somme de ses côtés une fois et demie, et l'aire du quatrième égale à deux fois la somme de ses côtés; et de cette manière (le rapport de) l'aire de chacun de ces (triangles à la somme de ses côtés) dépasse (le rapport de) l'aire du triangle précédent (à la somme de ses côtés) de la moitié d'une fois. La même relation a lieu aussi entre les aires des triangles qui sont produits au moyen de trois nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, (considérés) les uns par rapport aux autres.

(Pour) les triangles produits au moyen de quatre nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, l'aire du premier de ces (triangles) est égale à une fois et demie la somme de ses côtés, l'aire du second est égale à trois fois la somme de ses côtés, l'aire du troisième est égale à quatre fois et demie la somme de ses côtés, et de la même manière (le rapport de) l'aire de chacun de ces (triangles à la somme de ses côtés) dépasse (le rapport de) l'aire du triangle précédent (à la somme de ses côtés) d'une fois et demie.

(Pour) les triangles produits au moyen de six nombres consécutifs quelconques | à partir de l'unité, l'aire du premier de ces (triangles) est égale à deux fois et fol. 91 *verso.* demie la somme de ses côtés, l'aire du second est égale à cinq fois la somme de ses côtés; et pareillement (le rapport de) l'aire de chacun de ces (triangles à la somme de ses côtés) dépasse (le rapport de) l'aire du triangle précédent (à la somme de ses côtés) de deux fois et demie.

(Pour) les triangles produits au moyen de huit nombres consécutifs quelconques à partir de l'unité, l'aire du premier de ces (triangles) est égale à trois fois et demie la somme de ses côtés, l'aire du second est égale à sept fois la somme de ses côtés, et pareillement (le rapport de) l'aire de chacun de ces (triangles à la somme de ses côtés) dépasse (le rapport de) l'aire du triangle précédent (à la somme de ses côtés) de trois fois et demie.

Et de cette manière, toutes les fois qu'on ajoute deux nombres aux nombres consécutifs, l'aire du triangle qui en résulte, augmente, relativement à l'aire du triangle précédent, d'une fois le nombre des multiples (de la somme de ses côtés).

Si nous multiplions les côtés d'un des triangles primitifs par un certain nombre (exprimant) des multiples ou des parties, il en résulte des triangles dérivés de ce triangle.

OBSERVATIONS.

Les théorèmes énoncés ici par l'auteur sont, à partir du second, distincts de ceux que nous avons trouvés ci-dessus dans le N.° 12 du fragment anonyme. Malheureusement les théorèmes du présent traité, à l'exception des deux premiers, concernant les triangles produits au moyen de deux et de trois nombres consécutifs, sont faux.

En effet, désignons par A l'aire et par P le périmètre du triangle. Le triangle rectangle formé au moyen des deux nombres consécutifs m, $m+1$ a pour côtés

$$m+(m+1),\quad 2m(m+1),\quad m^2+(m+1)^2$$

donc

$$A=m(m+1)(2m+1),\qquad P=2(m+1)(2m+1),\qquad \frac{A}{P}=\frac{m}{2}.$$

Le triangle rectangle produit au moyen des trois nombres consécutifs m, $m+1$, $m+2$ (voir ci-dessus pag. 51, lig. 3 et suiv.) a pour côtés

$$m(m+2).\quad 2(m+1),\quad (m+1)^2+1$$

donc

$$A=m(m+1)(m+2),\qquad P=2(m+1)(m+2),\qquad \frac{A}{P}=\frac{m}{2}.$$

Mais quant aux triangles rectangles produits au moyen de quatre, de six, de huit nombres consécutifs, et ainsi de suite (voir ci-dessus pag. 53, lig. 1 et suiv.), le triangle rectangle produit au moyen des $2(n+1)$ nombres consécutifs m, $m+1$, $m+2$, ... , $m+2n+1$ a pour côtés

$$(m+n)+(m+n+1),\quad 2(m+n)(m+n+1),\quad (m+n)^2+(m+n+1)^2$$

donc

$$A=(m+n)(m+n+1)(2m+2n+1),\quad P=2(m+n+1)(2m+2n+1),\quad \frac{A}{P}=\frac{m+n}{2}.$$

Le rapport $\frac{A}{P}$ prend donc successivement les valeurs :

pour les triangles rectangles produits au moyen de quatre nombres consécutifs

$$1,\ 1\tfrac{1}{2},\ 2,\ 2\tfrac{1}{2},\ 3,\ldots.$$

pour les triangles rectangles produits au moyen de six nombres consécutifs

$1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, . . .

pour les triangles rectangles produits au moyen de huit nombres consécutifs

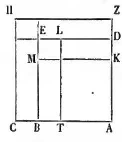
2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, . . .

et ainsi de suite.

On dirait que l'auteur a reçu par quelque communication orale une connaissance imparfaite de théorèmes énoncés ailleurs, et qu'il se croit en état de les reproduire sans même se donner la peine de les vérifier. On a déjà remarqué ci-dessus un fait semblable (voir pag. 47, lig. 2), lorsque l'auteur ne réussit pas à trouver la véritable nature de la suite qui renferme les hypoténuses des triangles rectangles primitifs, tout en paraissant posséder d'avance sur la loi de cette suite certaines notions justes, mais incomplètes ou confuses. Je répète d'ailleurs que je ne publie pas la traduction du présent traité à cause de sa valeur mathématique, mais parce qu'il complète à certains égards, et notamment en ce qui concerne les nombres congruents, le fragment anonyme ci-dessus, et parce que, joint à ce fragment, il nous donne une idée assez précise des points qu'embrassait la théorie arabe des triangles rectangles en nombres entiers vers la fin du X.e siècle de notre ère.

Les dernières lignes du texte ci-dessus comprennent ce que l'auteur a à dire sur la formation des triangles rectangles en nombres rationnels. On voit du reste aisément que tout triangle rectangle en nombres rationnels est ou bien un triangle rectangle primitif en nombres entiers, ou dérivé d'un triangle rectangle primitif en nombres entiers.

Quant au but de la connaissance de ces triangles, c'est de trouver un nombre qui a une racine, (et tel que) si on y ajoute un (certain) nombre, la somme a une racine, et si on en retranche le même nombre, le reste a une racine.



Explication. Nous posons AB, BC (égaux aux) deux côtés (comprenant l'angle droit) d'un des triangles à côtés rationnels; nous construisons sur AB, AC deux carrés AE, AH; nous prolongeons DE jusqu'à CH, et BE jusqu'à ZH; nous coupons TB égal à BC, et KD égal à ZD, et nous menons les deux lignes TL, KM parallèles à AD, AB; alors le produit du côté AB par lui-même est le carré AE, et le produit du côté BC par lui-même est le carré EH; conséquemment la racine de la somme de ces deux (carrés) est rationnelle, parce que c'est l'hypoténuse du triangle. Nous ajoutons à ces deux (carrés) le produit de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, à savoir les deux (rectangles) complémentaires ZE, EC; alors il résulte comme somme le carré AH; donc la racine de la (somme), à savoir AC, est rationnelle, parce que chacune des deux (parties) AB, BC est rationnelle. Mais (d'un autre côté) le produit de AB par lui-même et (le produit) de TB, c'est à dire de BC, par lui-même sont égaux au produit de AB par TB (pris) deux fois, avec le produit de AT par lui-même, qui est le carré KT, en vertu de ce qui est exposé dans la septième proposition du second livre du Traité des Éléments; et le produit de AB par TB (pris) deux fois est égal à (la somme des) deux (rectangles) complémentaires ZE, EC; par conséquent les deux carrés AE, LM dont la somme est égale au carré de l'hypoténuse, sont égaux aux deux (rectangles) complémentaires ZE, EC avec le carré TK; (si) donc nous retranchons

du carré de l'hypoténuse les deux (rectangles) complémentaires ZE, EC, il reste le carré TK dont la racine est AT; et AT est rationnel parce que c'est la différence des deux côtés AB, TB qui sont rationnels.

Alors donc le carré de l'hypoténuse du triangle est un nombre [qui a une racine], (et tel que) si on y ajoute un (certain) nombre, à savoir (la somme des) deux (rectangles) complémentaires ZE, EC qui résultait de la multiplication de l'un des deux côtés (comprenant l'angle droit) par l'autre (pris) deux fois, il résulte le carré AH qui est un nombre qui a une racine, et dont la racine est la somme des deux côtés; et si on retranche du carré de l'hypoténuse le même nombre, à savoir les deux (rectangles) complémentaires, il reste le carré TK qui est un nombre qui a une racine, et dont la racine est la différence des deux côtés. Il est clair aussi d'après cela que le nombre ajouté et retranché est ce qui | résulte de la multiplication de l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois. fol. 92 *recto.*

OBSERVATIONS.

Ce qu'il importe surtout de remarquer dans le texte ci-dessus, c'est que l'auteur déclare en termes clairs et précis que le but de la théorie des triangles rectangles en nombres rationnels est la résolution du problème des nombres congruents (comparer ci-dessus pag. 23, lig. 6; pag. 36, lig. 9).

L'auteur démontre par une figure géométrique le principe de cette résolution, savoir que si on a satisfait par des nombres rationnels à l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

on aura

$$z^2 + 2xy = (x + y)^2 \quad \text{et} \quad z^2 - 2xy = (x - y)^2$$

ou $x+y$ et $x-y$ seront pareillement des nombres rationnels. Dans la figure ci-dessus AB correspond à x, BC à y, AC à $x + y$, AT à $x - y$.

Cette démonstration géométrique présente d'ailleurs un caractère qui mérite d'être remarqué; c'est qu'elle est fondée sur des considérations de juxtaposition (*), méthode que les géomètres indiens semblent avoir employée avec prédilection. Cette circonstance serait-elle un indice que le problème des nombres congruents sous la forme où nous le voyons traité par les Arabes, leur est venu des Indiens? On sait bien que Diophante a résolu en nombres rationnels divers cas des équations simultanées $x^2 + y = z^2$, $x^2 - y = t^2$ (voir ci-dessus pag. 22, lig. 28); mais il paraît d'un autre côté que l'analyse indéterminée de Diophante n'est pas restée inconnue aux géomètres indiens et qu'elle a été développée par eux. Je fais observer, en outre, que la résolution arabe du problème des nombres congruents est intimement liée à la construction d'une figure géométrique en nombres rationnels, et que de semblables constructions de figures géométriques en nombres rationnels sont un des sujets les plus remarquables traités par Brahmagupta (Voir *Colebrooke, Algebra etc. from the sanscrit*, London 1817 pag. 295 à 311; et *Chasles, Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles 1837, pag. 420 à 447). Je rappelle enfin que rien ne prouve jusqu'à présent que les Arabes aient connu Diophante antérieurement à la traduction qu'en fit Aboûl Wafâ (mort en 998 de notre ère), tandis qu'on place Brahmagupta environ au milieu du VII.e siècle, et que les communications scientifiques des Arabes avec les Indiens remontent à la seconde moitié du VIII.e siècle.

Si notre but est seulement de trouver un nombre qui a une racine, (et tel que) si on y ajoute un certain nombre, ce qui résulte a une racine, et (que) si on en retranche le même nombre, ce qui reste a une racine, nous prenons deux

(*) La citation d'Euclide est inutile; on voit par juxtaposition que AE + LM = KE + ET + KT = ZE + EC + KT.

nombres quels qu'ils soient, consécutifs ou non consécutifs, nous multiplions l'un par l'autre, nous multiplions ensuite le produit par la somme des deux nombres, et nous divisons ce qui en résulte par leur différence. Ce qu'on obtient est le nombre ajouté et retranché. Ensuite nous multiplions chacun des deux nombres par lui-même, nous prenons la moitié de la somme des deux (produits), puis nous divisons par la différence des deux nombres. Ce que l'on trouve est la racine du nombre qui (est tel que) si on y ajoute le nombre ajouté et retranché, ce qui résulte a une racine, et (que) si on en retranche le même nombre, le reste a une racine.

Il arrive quelquefois que cette opération est en défaut dans (le cas de) deux nombres non consécutifs. Cela (a lieu) lorsque le nombre qui résulte de la racine trouvée est plus petit que le nombre ajouté et retranché. La démonstration de tout cela se trouve (comprise) dans ce que nous avons décrit.

Nous avons donc démontré qu'au moyen de deux nombres différents quelconques nous construisons un triangle rectangle ayant les deux côtés (de l'angle droit) et l'hypoténuse rationnels. C'est que nous multiplions la somme des deux (nombres) par leur différence, (d'où) résultera l'un des deux côtés; que nous multiplions l'un des deux (nombres) par l'autre (pris) deux fois, (d'où) résultera l'autre côté; que nous multiplions le plus petit des deux nombres par lui-même, que nous doublons le (produit), et que nous réservons ce qui en résulte; que nous multiplions la différence des deux (nombres) par elle-même, et que nous réservons ce qui en résulte; que nous ajoutons ensuite le plus petit des deux résultats (réservés) au plus grand des deux côtés, ou que nous ajoutons le plus grand des deux résultats (réservés) au plus petit des deux côtés, (d'où) résultera l'hypoténuse. Après cela nous multiplions l'un des deux côtés par l'autre (pris) deux fois, et il résultera le nombre ajouté et retranché. Ceci est l'opération la plus courte qui existe pour trouver cette espèce de triangles.

OBSERVATIONS.

Le nombre congruent formé par l'auteur dans le premier alinéa du texte ci-dessus, et le carré auquel ce nombre est congruent, sont ceux du fragment anonyme divisés par $4(a-b)^2$. On a en effet

$$\left[\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}\right]^2+\frac{ab(a+b)}{a-b}=\left[\frac{a+b}{2}+\frac{ab}{a-b}\right]^2$$

$$\left[\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}\right]^2-\frac{ab(a+b)}{a-b}=\left[\frac{a+b}{2}-\frac{ab}{a-b}\right]^2$$

On ne voit pas bien quelle est la difficulté dont l'auteur veut parler dans le second alinéa. Il paraîtrait qu'il a pensé que l'on pourrait avoir quelquefois $\left[\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}\right]^2<\frac{ab(a+b)}{a-b}$. Mais ce serait une erreur, car on a toujours

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2>2(a^2-b^2)(2ab)$$

donc

$$\left[\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}\right]^2>\frac{ab(a+b)}{a-b}.$$

Dans le troisième alinéa l'auteur résume ainsi la formation des quantités principales dont il a été question dans son traité :

les deux cathètes du triangle rectangle	$(a+b)(a-b)$, $2ab$
l'hypoténuse	$(a+b)(a-b)+2b^2$ ou $2ab+(a-b)^2$
le nombre congruent	$2(a+b)(a-b)(2ab)$.

Quant à la formation de l'hypoténuse a^2+b^2, on a en effet $2b^2<(a-b)^2$ si $a^2-b^2>2ab$, et $2b^2>(a-b)^2$ si $a^2-b^2<2ab$.

Nous avons maintenant dressé deux tables dans la première desquelles nous avons inscrit les triangles (rectangles) qui sont produits au moyen de deux nombres consécutifs, pris deux à deux parmi les nombres suivant l'ordre à partir de l'unité. Ce sont les triangles dont les plus petits côtés sont les (nombres) impairs suivant l'ordre à partir du trois, et qui sont nommés, à cause de cela, les triangles impairs. Or, il est évident que les nombres impairs suivant l'ordre se dépassent l'un l'autre continuellement de deux. Les (plus) grands (des deux) côtés (comprenant l'angle droit) de ces (triangles) sont continuellement plus petits d'une unité que les hypoténuses.

Dans la seconde table nous avons inscrit les triangles (rectangles) qui sont produits au moyen de tous les groupes de trois nombres consécutifs pris parmi les nombres suivant l'ordre à partir de l'unité en passant tour à tour un nombre, par ce que, s'il arrive que les deux extrêmes des trois (nombres) soient pairs, le triangle est dérivé du triangle qui précède, ainsi que nous l'avons expliqué dans un autre endroit. Les plus petits côtés de ces triangles sont pairs en commençant par le huit et en se dépassant l'un l'autre continuellement de quatre; car on en a passé de deux en deux à cause des triangles qui sont dérivés. C'est pourquoi (ces triangles) sont nommés les triangles pairs. Les (plus) grands (des deux) côtés (comprenant l'angle droit) de ces (triangles) sont continuellement plus petits de deux que les hypoténuses.

Nous avons laissé de côté les autres triangles (rectangles) qui sont engendrés au moyen des autres méthodes que nous avons expliquées, afin que celui qui voudra puisse les déterminer. Leurs plus petits côtés ne se dépassent pas les uns les autres d'après une règle et un ordre, et les (plus) grands (des deux) côtés (comprenant l'angle droit) de ces (triangles) (ne présentent pas) non plus (de la régularité) dans (la quantité) dont ils sont plus petits que les hypoténuses.

Nous avons terminé la première table au triangle dont le plus petit côté est 31, et la seconde table au triangle dont le plus petit côté est 64.

Voici la table : |

fol. 92 verso.

Les triangles pairs		
Les hypoténuses	Les grands côtés	Les petits côtés
17	15	8
37	35	12
65	63	16
101	90	20
145	143	24
197	195	28
257	255	32
325	323	36
401	399	40
485	483	44
577	575	48
677	675	52
785	783	56
901	899	60
1025	1023	64
1157	1155	68
1297	1295	72

Les triangles impairs		
Les hypoténuses	Les grands côtés	Les petits côtés
5	4	3
13	12	5
25	24	7
41	40	9
61	60	11
85	84	13
113	112	15
145	144	17
181	180	19
221	220	21
265	264	23
313	312	25
365	364	27
421	420	29
481	480	31
545	544	33
613	612	35

OBSERVATIONS.

Quant aux triangles rectangles produits au moyen de trois nombres consécutifs dont les deux extrêmes sont pairs, et qui seraient, d'après l'auteur, dérivés chacun du triangle qui le précède, voy. ci-dessus pag. 52, lig. 10 et suiv.

Les deux tables du texte manuscrit contiennent chacune, comme on voit, deux triangles de plus que n'en annonce l'auteur dans les dernières lignes du texte ci-dessus.

Les chiffres des deux tables sont exprimés dans le manuscrit au moyen des lettres de l' alphabet arabe; et comme il y a lieu de croire que la page du manuscrit qu'occupent ces deux tables, a été écrite dans l'espace de temps compris entre les années 969 et 972 de notre ère (voir ci-dessus pag. 8), il s'ensuit qu'à cette époque on se servait déjà des six lettres *tsd*, *khd*, *dzdl*, *dhdd*, *zhd*, et *ghaïn*, pour exprimer respectivement les nombres 500, 600, 700, 800, 900, 1000. D'un examen des livres de Hamza, législateur des Druzes, M. de Sacy avait tiré la conjecture que cet emploi des six lettres que je viens de dire, ne pouvait être antérieur aux premières années du cinquième siècle de l'hégire, qui commence en 1010 de notre ère (voir *Grammaire arabe*, seconde édition, Paris 1831. T. I, pag. 90, note 2); mais on voit par le fait que je viens de signaler, que l'usage dont il s'agit est plus ancien, selon toutes les probabilités, d'un demi-siècle au moins et peut-être davantage.

Ce que l'auteur dit de la formation des tablea est exact. Il ne fait pas remarquer que la suite des hypoténuses se forme aussi très-facilement au moyen des différences ; ce sont les différences deuxièmes qui sont constantes. On voit d'ailleurs que les petits côtés des triangles pairs sont précisément les différences des hypoténuses des triangles impairs suivant l'ordre.

C'est à tort que l'auteur prétend que les autres méthodes pour construire les triangles rectangles n'offrent aucune régularité dans le succession de leurs côtés. Prenons, en effet, la plus générale des formules qu'il a proposées, savoir $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$, $2ab$, et construisons une table à double entrée des valeurs de ces expressions, dont voici le commencement :

	$a = 1$	2	3	4	5	6
$b = 1$	2, 0, 2	5, 3, 4	10, 8, 6	17, 15, 8	26, 24, 10	37, 35, 12
2		8, 0, 8	13, 5, 12	20, 12, 16	29, 21, 20	40, 32, 24
3			18, 0, 18	25, 7, 24	34, 16, 30	45, 27, 36
4				32, 0, 32	41, 9, 40	52, 20, 48
5					50, 0, 50	61, 11, 60
6						72, 0, 72

Un coup d'oeil jeté sur ce tableau suffit pour nous montrer qu'il se construit très-aisément au moyen des différences premières et deuxièmes prises suivant la longueur, ou la largeur, ou même suivant les diagonales. On peut en outre, si l'on veut, y découvrir une foule de propriétés qui n'auraient pas manqué de paraître fort belles à Nicomaques, mais sur lesquelles il est inutile d'insister ici.

Au bas de la page fol. 92 v°. du manuscrit, au-dessous des deux tables, se trouvent les mots *'odridha bi-l-açli* « collationné avec le manuscrit autographe. »

ERRATA ET ADDENDA.

Pag. 7, *lig.* 7 : pag. 44 et suiv.; *lisez* : pag. 42 à 45.
Pag. 21, *lig.* 13 : premieres; *lisez* : premiers.
Pag. 22, *lig.* 26 : ä ; *lisez* : à.
Pag. 26, *lig.* 20. Entre cette ligne et la ligne suivante il se trouve dans le manuscrit une ligne complétement identique à la ligne suivante, à cela près que le nombre placé dans la première case à droite est 19 au lieu de 17. Je devais naturellement supprimer cette ligne qui ne provenait évidemment que d'une erreur du copiste. Mais après le tirage de la feuille je me suis aperçu qu'à la place de la ligne supprimée il y eut sans aucun doute, dans le manuscrit original que le copiste avait sous les yeux, une ligne correspondant à la décomposition de 19 en 9+10 et à l'hypoténuse 181. Il faut donc intercaler, entre les lignes 29 et 21 de la page 26, la ligne suivante:

161, 25021	199, 39601	6849	32961	181	180	19	10, 9	19

Par suite il faut aussi intercaler dans le tableau des nombres congruents primitifs qui se trouve pag. 27, lig. 33 à 38, les nombre 190 entre les nombres 154 et 210; et changer pag. 27, lig. 39 les mots: « en 33 lignes 29 nombres congruents primitifs » dans : *en 34 lignes 30 nombres congruents primitifs*. Enfin il faut dans les tableaux des pages 32 et 33, entre la 6e. et 7e. ligne en remontant, intercaler une ligne contenant les valeurs suivantes :

$x = 19$; $y = 180$; $z = 181$;
$2xy = 6840, 190$; $zx = 3439$; $zy = 32589, 905$;
$-(x^2 - y^2) = 32039$; $z^2 + x^2 = 33122\ 2p$; $z^2 + y^2 = 65161$;
$\left(\frac{z+x}{2}\right)^2 + (z - x)^2 = 36244, 9061$; $(z + x)^2 + \left(\frac{z - x}{2}\right)^2 = 46561$;
$2z^2 - (x + y - 2z)^2 = 38953$ * ; $(x + y + 2z)^2 - 2z^2 = 249199$ * ;
$(x - y - 2z)^2 - 2z^2 = 208007$; $2z^2 - (x - y + 2z)^2 = 25121$ * ;
$-4xy(x^2 - y^2) = 438293520, 3043795$.

Pag. 37, *lig.* 30 *lisez* : carré, est démontré dans la 1re proposition du IXe. Livre des Éléments.
Pag- 52, *lig.* 27 *ajoutez* : Les côtés des triangles rectangles déduits des nombres 2, 3, 4 ; 4, 5, 6; 6, 7, 8 ; 8, 9, 10 ; 10, 11, 12 ; 12, 13, 14 ; etc. sont doubles des côtés des triangles rectangles formés au moyen des nombres 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4. 5; 5, 6; 6, 7; etc. respectivement. C'est peut-être ce que l'auteur a voulu dire, mais ce que, en tout cas, il n'a pas dit.

IMPRIMATUR
Fr. Hieron. Gigli Ord. Praed. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR
Fr. A. Ligi-Bussi Min. Conv. Archiep. Icon. Vicesg.